

Université de Montréal

Transformations quasi-conformes de maillages volumiques et applications en infographie

par
Gilles-Philippe Paillé

Département d'informatique et de recherche opérationnelle
Faculté des arts et des sciences

Thèse présentée à la Faculté des études supérieures et postdoctorales
en vue de l'obtention du grade de Philosophiæ Doctor (Ph.D.)
en informatique

Janvier, 2015

© Gilles-Philippe Paillé, 2015

Résumé

La modélisation géométrique est importante autant en infographie qu'en ingénierie. Notre capacité à représenter l'information géométrique fixe les limites et la facilité avec laquelle on manipule les objets 3D. Une de ces représentations géométriques est le maillage volumique, formé de polyèdres assemblés de sorte à approcher une forme désirée. Certaines applications, tels que le placage de textures et le remaillage, ont avantage à déformer le maillage vers un domaine plus régulier pour faciliter le traitement. On dit qu'une déformation est *quasi-conforme* si elle borne la distorsion.

Cette thèse porte sur l'étude et le développement d'algorithmes de déformation quasi-conforme de maillages volumiques. Nous étudions ces types de déformations parce qu'elles offrent de bonnes propriétés de préservation de l'aspect local d'un solide et qu'elles ont été peu étudiées dans le contexte de l'informatique graphique, contrairement à leurs pendants 2D. Cette recherche tente de généraliser aux volumes des concepts bien maîtrisés pour la déformation de surfaces.

Premièrement, nous présentons une approche linéaire de la quasi-conformité. Nous développons une méthode déformant l'objet vers son domaine paramétrique par une méthode des moindres carrés linéaires. Cette méthode est simple d'implémentation et rapide d'exécution, mais n'est qu'une approximation de la quasi-conformité car elle ne borne pas la distorsion. Deuxièmement, nous remédions à ce problème par une approche non linéaire basée sur les positions des sommets. Nous développons une technique déformant le domaine paramétrique vers le solide par une méthode des moindres carrés non linéaires. La non-linéarité permet l'inclusion de contraintes garantissant l'injectivité de la déformation. De plus, la déformation du domaine paramétrique au lieu de l'objet lui-même permet l'utilisation de domaines plus généraux. Troisièmement, nous présentons une approche non linéaire basée sur les angles dièdres. Cette méthode définit la déformation du solide par les angles dièdres au lieu des positions des sommets du maillage. Ce changement de variables permet une expression naturelle des bornes de distorsion de la déformation. Nous présentons quelques applications de cette nouvelle approche dont la paramétrisation, l'interpolation, l'optimisation et la compression de maillages tétraédriques.

Mots clés : Paramétrisation, quasi-conforme, maillage, volume

Abstract

Geometric modeling is important for both computer graphics and engineering. Our ability to represent geometric information sets the limits and the ease with which we manipulate 3D objects. One such representation is the volume mesh, that is composed of polyhedra assembled to approximate a desired shape. Some applications, such as texturing and remeshing, benefit from deforming the mesh to a more regular domain in order to perform some operations. We say that a deformation is *quasi-conformal* if its distortion is bounded.

In this thesis, we propose algorithms for quasi-conformal deformations of volume meshes. We study these deformations because of their good local shape preservation properties and because they are still relatively unknown to the graphics community, as opposed to their 2D counterparts. This research attempts to generalize some well-known surface deformation concepts to volumes.

First, we present a linear approach to quasi-conformality. We develop a method that deforms a solid to a parameterization domain using a linear least squares method. This method is fast and simple to implement, but the result is an approximation to quasi-conformality because distortion is not bounded. Second, we solve this latter limitation with a nonlinear approach based on vertex positions. We develop a technique to deform the parameterization domain to a solid shape using a nonlinear least squares method. Nonlinearity lets us include constraints that guarantee the injectivity of the deformation. Moreover, deforming the parameterization domain instead of the shape itself lets us use more general domains. Third, we present a nonlinear approach based on dihedral angles. Our method defines the deformation of the volume mesh using its dihedral angles instead of its vertex positions. This change of variables permits a natural expression of the bounds of the deformation distortion. We present some applications of this new approach that include volume parameterization, shape interpolation, mesh optimization, and mesh compression of tetrahedral meshes.

Keywords: Parameterization, quasi-conformal, mesh, volume

Table des matières

Résumé	ii
Abstract	iii
Table des matières	iv
Liste des tableaux	vii
Liste des figures	viii
Remerciements	xiii
Chapitre 1 : Introduction	1
1.1 Contributions	3
1.2 Plan de la thèse	5
Chapitre 2 : État de l’art	6
2.1 Paramétrisations surfaciques	6
2.2 Paramétrisations volumiques	10
Chapitre 3 : Paramétrisation volumique linéaire	17
3.1 Cas continu	19
3.2 Cas discret	20

3.3	Algorithme	22
3.3.1	Paramétrisation surfacique	22
3.3.2	Paramétrisation volumique harmonique	23
3.3.3	Rotations locales et coefficients	23
3.3.4	Paramétrisation volumique quasi-conforme	23
3.4	Résultats	24
3.5	Métriques alternatives	27
3.5.1	Échelle uniforme	29
3.6	Discussion et conclusion	30
Chapitre 4 : Approche non linéaire par positions		32
4.1	Travaux connexes	33
4.1.1	Ajustement de surfaces	34
4.1.2	Ajustement de solides	34
4.1.3	Optimisation de maillages volumiques	35
4.2	Ajustement volumique	36
4.2.1	Fonctionnelle d'énergie volumique	38
4.2.2	Formulation par éléments finis	40
4.2.3	Fonctionnelle d'énergie surfacique	44
4.2.4	Optimisation	45
4.3	Résultats	46

4.3.1	Maillages mixtes	47
4.3.2	Optimisation de maillages	52
4.3.3	Volumes de subdivision	53
4.3.4	Maillages de coques minces	54
4.4	Discussion et conclusion	55
Chapitre 5 : Approche non linéaire par angles dièdres		57
5.1	Variables d'angles dièdres	59
5.2	Aplanissement	65
5.3	Reconstruction	68
5.4	Applications	72
5.4.1	Paramétrisation volumique	74
5.4.2	Interpolation de solides	78
5.4.3	Formes par la combinatoire	79
5.4.4	Optimisation de maillages	81
5.4.5	Compression de maillage	83
5.5	Discussion et conclusion	84
Chapitre 6 : Conclusion		87
Bibliographie		91

Liste des tableaux

3.I	Résultats obtenus pour différents maillages. Les temps de calcul sont en secondes et la valeur optimale minimale pour les deux mesures d'énergie est 2. Une image de chaque modèle plus complexe se retrouve au bas du tableau, dans l'ordre gauche à droite.	25
3.II	Quelques mesures de l'énergie angulaire pour trois maillages. Des résultats similaires ont été obtenus pour tous les maillages testés ainsi qu'avec la mesure d'énergie volumique. Les métriques comparées sont la matrice jacobienne de similitude (MJS), la métrique de Gregson et al. [GSZ11], la métrique de Li et al. [LLT11] et les coordonnées <i>mean value</i> (MVC) [JSW05].	29
4.I	Les résultats de quelques modèles illustrés dans les figures 4.6 et 4.7. Le tableau présente l'ordre des éléments, le nombre d'éléments, le temps de calcul de l'optimisation en minutes et les statistiques de la déformation par le jacobien normalisé.	47
5.I	Résultats de l'optimisation d'un maillage en utilisant les modèles de l'article par Aigerman et al. [AL13] (IBDM). Nous montrons les angles dièdres (AD) minimum et maximum des maillages résultant en utilisant la méthode IBDM et la nôtre.	82
5.II	Quelques statistiques pour tous les exemples, où le nombre d'itérations est le nombre de phases, multiplié par le nombre d'itérations par phase, et où les temps de calcul sont en secondes.	85

Liste des figures

1.1	Exemples d'un maillage (gauche), d'une surface de subdivision (centre) et de la paramétrisation d'une surface vers un domaine plat (droite).	1
1.2	Une transformation conforme (a) et une transformation non conforme du carré unitaire (b).	4
2.1	Exemples de paramétrisations dont les domaines sont une forme libre ayant la topologie d'un disque (gauche) [HPS08] et un polycube (droite) [HWFQ09]. .	7
2.2	Champ vectoriel obtenu en dérivant une fonction harmonique scalaire calculée dans (a) le solide et (b) le polycube associé au solide. Images tirées de [XHY ⁺ 10].	12
2.3	(a) Ruban de Möbius volumique obtenu en assemblant (b) quatre cubes formant un polycube dont les faces ont été collées respectant certaines règles d'association et de rotation. Images tirées de [LLWQ10].	13
2.4	Exemple d'un maillage hexaédrique d'un solide (a) [GSZ11] et d'un maillage de coque mince (b) [HXH10].	16
3.1	Paramétrisation volumique quasi-conforme du modèle <i>Mudface</i> (gauche) vers un polycube, avec une coupe iso- v (centre) et une coupe iso- u (droite) du maillage. La coupe iso- u montre les différences entre la paramétrisation harmonique et la paramétrisation quasi-conforme. Notez l'amélioration de l'uniformité près des frontières.	17
3.2	Une coupe planaire d'une sphère bosselée (gauche) paramétrisée avec l'opérateur de Laplace (a), l'opérateur de quasi-conformité (b) et l'opérateur d'échelle uniforme (c) avec $\omega = 0.6125$, où ω est un paramètre d'uniformité (voir la section 3.5.1).	18

3.3	Notation d'un tétraèdre : A_i est l'aire de la face opposée au sommet v_i , $\hat{\mathbf{n}}_i$ est la normale unitaire de la face, et \mathbf{n}_i est la normale pondérée par l'aire de la face. .	20
3.4	Les résultats des paramétrisations harmoniques (a,c) et des paramétrisations quasi-conformes (b,d).	26
3.5	Une mesure d'énergie du <i>Chinese Lion</i> paramétrisé sur un polycube. La distribution de l'énergie par code de couleurs d'une coupe planaire ainsi que l'histogramme associé pour la paramétrisation harmonique (a,c) et la paramétrisation quasi-conforme (b,d). Notez que 86% du volume a une valeur d'énergie en dessous de 3 pour la paramétrisation quasi-conforme en comparaison avec 76% pour la paramétrisation harmonique.	27
3.6	Optimisation d'échelle uniforme d'une sphère paramétrisée vers le cube. Les valeurs extrêmes de ω (e,f) montrent des signes de dégénérescence et sont numériquement instables lors de l'optimisation. Un graphe (g) de l'énergie angulaire en fonction de la valeur de ω montre que $\omega = 0.5$ est optimal.	31
3.7	Paramétrisation quasi-conforme du pied (a), buste (b), <i>Pensatore</i> (c) et du torse (d), avec en-dessous les codomaines utilisés pour chaque objet.	31
4.1	Notre méthode ajuste une abstraction volumique initiale à un maillage surfacique utilisant des éléments finis d'ordre supérieur. Cette figure montre l'évolution de la forme initiale par incrément de l'ordre de chaque élément. Ce maillage adaptatif ne stocke que 6% de tous les noeuds que nécessiterait un maillage d'ordre 12 complet.	32
4.2	Un plongement initial (gauche) est déformé sans contrainte avec une métrique optimisant la rigidité (centre) et la conformité (droite) en utilisant des éléments d'ordre élevé. La métrique conforme tend à contracter ou à dilater le volume au voisinage des singularités.	37

4.3	Un exemple 2D d'un domaine paramétrique Ω (a), d'un plongement initial $f_0(\Omega)$ (b), d'une surface cible (c) et d'une transformation finale $f(\Omega)$ (d). . . .	37
4.4	Une transformation d'ordre élevé f d'un hexaèdre en utilisant une transformation linéaire définie par les noeuds aux sommets à laquelle nous ajoutons des déplacements additionnels définis par les noeuds aux arêtes et aux facettes. . .	40
4.5	Les effets de la non-uniformité des polynômes intégrés de Legendre en comparaison avec les polynômes intégrés de Fourier pour le modèle de la dent en utilisant des éléments d'ordre 6, avec le graphe de leur polynôme de degré 6 respectif. Notez les irrégularités du maillage près des arêtes (haut) et des sommets (bas) dans le cas des polynômes intégrés de Legendre (gauche).	43
4.6	Quelques maillages par éléments finis d'ordre élevé (centre) générés par notre méthode accompagnés de leur abstraction initiale (gauche) et d'une vue en coupe de chaque maillage (droite). Le modèle <i>Mudface</i> (haut) partage la même palette de couleurs que le modèle <i>King Kong</i> de la figure 4.1. Voir le tableau 4.I pour les statistiques associées.	48
4.7	Quelques résultats supplémentaires du tableau 4.I. La plupart des maillages ont bénéficié de la propriété de préservation des arêtes franches de la formulation anisotrope de la méthode VSDM.	49
4.8	L'évolution de l'énergie pour l'ajustement de deux modèles en phase d'ajustement rapproché. Les discontinuités du graphe sont dues aux raffinements successifs de l'ordre des éléments.	50
4.9	Notre méthode supporte les maillages dégénérés provenant de données bruitées, de soupes de polygones et possédant des triangles inversés. Nous montrons la surface cible (gauche) et le maillage volumique ajusté (droite) utilisant des éléments d'ordre 8. Notez le caractère lisse des résultats malgré les dégénérescences asymétriques.	50

4.10	L'abstraction (gauche), provenant de Gregson et al. [GSZ11], est ajusté à un nuage de points (centre) en utilisant des éléments d'ordre 2 (droite) en n'utilisant que l'ajustement inverse.	51
4.11	La création d'abstraction à partir d'une grille uniforme par de simples opérations d'édition de maillage interactive.	52
4.12	Le maillage tétraédrique original du lapin (gauche) contient des éléments inversés et dégénérés. Après optimisation (droite), le maillage ne contient plus de dégénérescences.	53
4.13	Quelques extensions de notre technique pour l'ajustement de solides de subdivision (gauche) et pour la création de maillages de coques minces (droite). Notez que les oscillations apparentes des vues en coupe des maillages de coques minces (zone blanche) est un artéfact artificiel causé par un changement soudain des rangées de cellules affichées.	54
5.1	Graphes de convergence, visualisés avec une échelle logarithmique, de l'interpolation d'une barre courbée pour différentes solutions initiales : angles interpolés initiaux (gauche), angles interpolés bruités (centre) et angles aléatoires (droite). L'expérience de la solution initiale aléatoire n'a convergée qu'à un minimum local et n'a pu être reconstruite. Les discontinuités dans graphes sont dues à un changement de phase de la méthode de minimisation.	69
5.2	Comparaison de la reconstruction gloutonne et spectrale du maillage d'une sphère dont les angles dièdres ont été perturbés. Notre méthode spectrale ajoute de la robustesse en distribuant uniformément l'erreur sur le maillage.	69
5.3	La paramétrisation volumique avec les angles dièdres permet d'insérer des singularités à la frontière (gauche) ou à l'intérieur du domaine (droite). Des contraintes assurent que les facettes identifiées (droite) correspondent parfaitement, à une rotation de 90 degrés près.	75

5.4	Des exemples de paramétrisation volumique utilisant des contraintes de poly-cube (gauche et centre) et un graphe de singularité (droite), tels qu’illustrés à la figure 5.3. La frontière de chaque exemple est contrainte à être plane, mais les singularités sont soit à l’extérieur ou à l’intérieur du maillage.	76
5.5	Les ambiguïtés géométriques inhérentes aux graphes de singularité. Chaque exemple montre deux domaines partageant le même graphe de singularité. . . .	77
5.6	Un exemple d’interpolation de solide d’une barre non déformée (gauche) vers une barre courbe (droite). Les formes intermédiaires sont calculées par une simple interpolation linéaire des angles dièdres avec différents poids. Nous montrons le conditionnement des matrices de transformation, nombre normalisé entre $[0, 1]$, de la barre droite vers la barre courbée pour les 100 tétraèdres les plus distordus.	80
5.7	La forme par la combinatoire est illustrée avec le modèle du pied. L’immersion originale (gauche) a été débarrassée de la position de tous ses sommets. En utilisant seulement la combinatoire, on peut les approcher (droite).	80
5.8	Exemples d’optimisation de la position des sommets internes d’une sphère et du modèle <i>fertility</i> . Les sommets internes ont été déplacés aléatoirement (gauche) pour introduire des inversions. Après l’optimisation (droite), la géométrie de tous les tétraèdres a été récupérée sans aucune inversion, tel que démontré par les angles minimum et maximum.	82
5.9	Nous compressons la géométrie d’un cube en utilisant ses angles dièdres à différents taux de compression. Garder 4 bits par angle ne crée aucun artefact visible alors que quelques irrégularités peuvent être perçues sur les arêtes (en pointillées) en ne gardant que 2 bits.	84
5.10	La distorsion angulaire du cube compressé (voir la figure 5.9), du modèle Bimba (gauche) et du buste (droite) à différents taux de compression. Nous montrons la reconstruction des maillages compressés en n’utilisant que 2 bits par angle.	85

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon directeur Pierre Poulin de m'avoir fait confiance pour travailler sur un sujet qui sortait de son champ d'expertise. Il m'a donné une très grande liberté et m'a supporté dans tous mes projets, y compris ceux qu'il jugeait stériles. Lorsque ces derniers battaient de l'aile, il a toujours su me redonner envie de continuer à travailler en me racontant les histoires de ses anciens étudiants et de ses propres années passées au doctorat. Par son humour, il a su mettre la bonne humeur au laboratoire, mais il a aussi su l'échanger par le sérieux lorsque j'en avais le plus besoin. Le doctorat a été pour moi une période éprouvante que j'ai pu traverser en grande partie grâce à lui.

Je tiens également à remercier mes collaborateurs avec qui j'ai eu la chance de travailler durant ces cinq dernières années. Je remercie tout d'abord Bruno Lévy pour m'avoir accueilli à deux reprises dans son laboratoire ALICE à Nancy et pour avoir su me communiquer son intérêt et sa curiosité pour la géométrie. Je remercie Nicolas Ray pour son écoute et pour son esprit critique et affûté qui a su déceler les moindres incohérences dans mes travaux et mes écrits. Je remercie Alla Sheffer pour ses critiques incisives et ses conseils qui ont mené à l'aboutissement de mon dernier projet. En somme, Pierre, Bruno, Nicolas et Alla m'ont transféré une éthique de recherche et une honnêteté intellectuelle que je n'aurais pu acquérir autrement.

Je tiens également à remercier les autres membres du laboratoire ALICE, soit Vincent, David, Jérémie, Kun, Alejandro, Sylvain, Dmitry, Jeanne, Samuel, Anass et Dobrina pour leur accueil et le bon temps passé en leur compagnie. Je tiens à remercier plus particulièrement Rhaleb Zayer pour sa patience, sa gentillesse et pour le temps qu'il m'a accordé pour me transférer ses nombreuses connaissances sur l'optimisation numérique.

Je remercie les gens du laboratoire LIGUM, qui ont fait d'un environnement de travail un terrain de jeu. Les meilleurs jours ont toujours été ceux où tout le monde y était. Je m'ennuierai de LIGUM Radio, des mots croisés, des énigmes, des jeux, des BBQ et de la jonglerie, mais je m'ennuierai surtout de vous : Éric, Luc, Jocelyn, Mohamed, Marc-Antoine, Nicolas, Arnaud Émilien, Arnaud Rosenblatt, Aurélien, Dorian, Cynthia, David, Dabid, Adrien, Aude, Jonathan, Olivier, Joël, Jean-Philippe, Sonia, Florian, Étienne, Chaitanya, Yangyang, Antoine, Mathias, Laurent, Mahdi, Thorsten, Cihan, Melino

et Omar. Je remercie également les professeurs Neil Stewart et Derek Nowrouzezahrai pour leurs nombreux conseils sur l'écriture de mes articles et de ma thèse.

Finalement, je remercie tout spécialement mes parents et ma famille qui m'ont encouragé durant toutes mes études. Je remercie particulièrement mes parents de m'avoir supporté non seulement financièrement, mais surtout moralement. Je les remercie de m'avoir écouté durant mes moments difficiles et d'avoir fait de grands efforts pour vraiment comprendre ce que je fais. J'ai trouvé ma motivation dans leur fierté et je serai toujours reconnaissant des sacrifices qu'ils ont faits pour me voir réussir.

Chapitre 1

Introduction

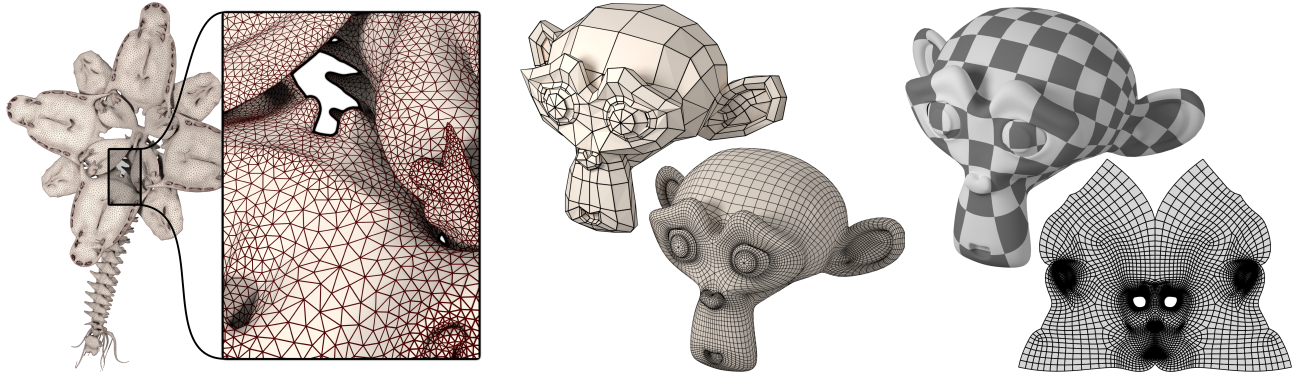


Figure 1.1 – Exemples d'un maillage (gauche), d'une surface de subdivision (centre) et de la paramétrisation d'une surface vers un domaine plat (droite).

La modélisation géométrique est importante autant en infographie qu'en ingénierie. On y trouve des applications allant de la simulation en aéronautique jusqu'à la représentation de mondes virtuels de jeux vidéo. Notre capacité à représenter l'information géométrique fixe les limites et la facilité avec laquelle on manipule les objets 3D. Quelques représentations très utilisées en infographie sont les maillages, les surfaces et volumes de subdivision ainsi que les courbes, surfaces et volumes paramétriques. Voyons premièrement leurs définitions et leurs contextes d'utilisation.

Un *maillage* est un ensemble de points, d'arêtes et de polygones connectés afin d'approcher la forme désirée. Un maillage surfacique est une représentation par frontière où seule la frontière de l'objet est conservée en mémoire (figure 1.1 (gauche)). Dans le domaine du jeu vidéo, cette représentation est très répandue car l'aspect visuel d'un objet est généralement défini par sa surface. Pour un maillage volumique, des polyèdres doivent être également conservés en mémoire ; on parle alors de *solide*. La connaissance du volume est très utile dans des applications telles que l'ingénierie, où les calculs de résistance sont généralement fonctions de la composition interne d'un solide. Le domaine médical bénéficie de cette représentation pour des simulations de chirurgies où l'information volumique des organes internes est nécessaire. Le domaine de l'informatique graphique bénéficie aussi de cette

représentation pour le rendu d'objets semi-transparents et la simulation d'objets déformables.

Une *surface de subdivision* est obtenue à l'aide d'un maillage de contrôle, dont chaque face est itérativement subdivisée en plus petits polygones afin d'obtenir une approximation plus détaillée de la forme désirée. Cette représentation permet un contrôle hiérarchique de l'apparence de l'objet. En effet, il est possible de modifier les sommets du maillage à chacun des niveaux de subdivision, permettant un contrôle global ou local de l'apparence. Cette représentation est très utilisée dans le domaine cinématographique et du jeu vidéo car elle permet aux artistes 3D d'avoir un bon contrôle sur la géométrie de l'objet à tous les niveaux de la modélisation et un affichage des détails de surface approprié selon leur taille dans l'image. La figure 1.1 (centre) montre un exemple d'une surface ayant subi deux étapes de subdivision. Pour généraliser aux *volumes de subdivision*, il suffit d'utiliser des maillages de contrôle formés de polyèdres où les mêmes concepts de subdivision peuvent être appliqués.

Un *objet paramétrique* est défini par un ensemble de fonctions donnant différentes propriétés de l'objet étant donné un ensemble de paramètres. Les propriétés peuvent être la position, la couleur, l'orientation, etc. L'ensemble de paramètres dépend de la dimension intrinsèque de l'objet. Une courbe n'a qu'un seul paramètre, une surface en a deux et un volume en a trois. Par exemple, il est possible de définir un cercle unitaire à l'aide d'un paramètre θ représentant l'angle par rapport à l'axe des X . Une surface, quant à elle, a besoin de plus de degrés de liberté. La figure 1.1 (droite) montre un maillage dont les paramètres permettent de définir à la fois la position et la couleur associées à chacun des sommets du maillage.

Il existe plusieurs façons de construire la fonction de correspondance. On peut la construire analytiquement, comme on l'a fait avec le cercle, et comme c'est le cas des courbes et des surfaces de Bézier. Pour ces exemples, on doit définir une fonction sous forme d'équation pour obtenir la forme de l'objet par son évaluation à l'aide de ses paramètres. On peut aussi vouloir associer un domaine paramétrique à un objet dont la géométrie est connue, comme un maillage. Dans ce cas-ci, c'est la fonction qui est inconnue et qui doit donc être construite. Le calcul de cette fonction est appelée *paramétrisation*. La mise en correspondance de chacun des sommets de l'objet vers une position du domaine paramétrique constitue la paramétrisation. Les coordonnées paramétriques à l'intérieur des triangles sont interpolées

en fonction des valeurs aux sommets.

D'un point de vue intuitif, on peut voir une paramétrisation comme une déformation de l'objet vers le domaine paramétrique. Cette déformation va généralement étirer et compresser certaines régions de l'objet. Il existe plusieurs déformations entre un objet et un même domaine paramétrique, mais certaines peuvent nuire aux traitements qui seront effectués ultérieurement sur l'objet. Pour cette raison, il est important de définir des critères de déformation afin de garantir le meilleur résultat possible. Le tout est de cibler les déformations nuisibles et les quantifier pour ensuite les minimiser. Bien sûr, chaque application a ses propres nécessités. Cependant, un type de paramétrisation très populaire de par leurs propriétés géométriques sont les paramétrisations *conformes*. On qualifie de conforme une fonction dont la matrice jacobienne est une matrice de similitude. Intuitivement, on peut imaginer qu'au niveau infinitésimal, un carré restera un carré lors de la transformation. Il n'y aura donc pas de cisaillement ou de mise à l'échelle non isotrope (figure 1.2). Les seules matrices de transformations acceptées sont les rotations et les changements d'échelle isotropes, ce qui permet de préserver les angles lors de la déformation.

En deux dimensions (2D), il est toujours possible de trouver une paramétrisation conforme. Mais en trois dimensions (3D), cette contrainte ne peut être respectée que pour un ensemble très restreint de déformations. La rigidité des espaces de dimension supérieure à deux est une conséquence du théorème de Liouville [Bla00]. Pour contourner cette rigidité, on relaxe la contrainte de transformations de similitude pour tolérer une quantité bornée de cisaillement et de changement d'échelle non uniforme. On les appelle alors des paramétrisations *quasi-conformes*. Le degré de quasi-conformité est quantifié par le ratio des valeurs singulières maximale et minimale de la matrice jacobienne en chaque point.

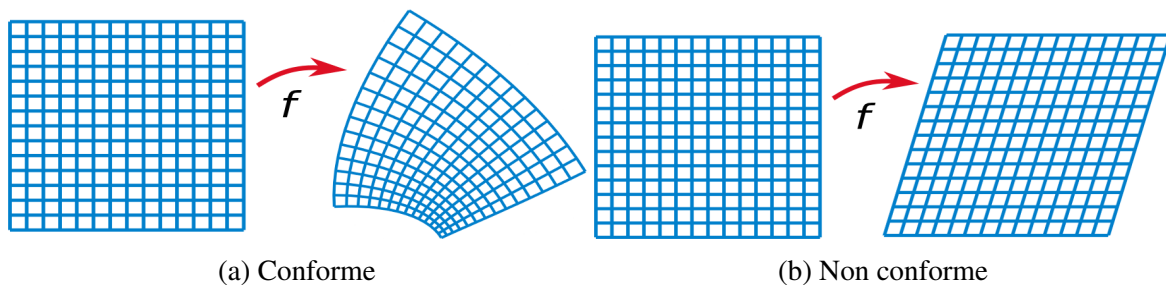


Figure 1.2 – Une transformation conforme (a) et une transformation non conforme du carré unitaire (b).

1.1 Contributions

Cette thèse porte sur l'étude et le développement d'algorithmes de paramétrisation quasi-conforme de maillages volumiques. Nous étudions ces paramétrisations parce qu'elles ont de bonnes propriétés de préservation de l'aspect local d'un solide et qu'elles ont été peu étudiées dans le contexte de l'informatique graphique, contrairement à leurs pendants 2D. Cette recherche tente de généraliser aux volumes des concepts bien maîtrisés pour la paramétrisation de surfaces. Nos contributions sont trois approches de paramétrisation volumique. Les apports sont autant du côté de la description mathématique de ces transformations que du côté de la discrétisation des équations obtenues.

La première contribution est une approche linéaire de la quasi-conformité. Nous développons une méthode déformant l'objet vers son domaine paramétrique par une méthode des moindres carrés linéaires inspirée d'une technique populaire 2D nommée *least-squares conformal maps* [LPRM02]. Le résultat n'est pas une déformation quasi-conforme à son sens strict car elle ne borne pas la distorsion. Néanmoins, sa simplicité et sa linéarité la rendent simple d'implémentation et rapide d'exécution. La deuxième contribution est une approche non linéaire basée sur les positions des sommets. Nous développons une technique déformant le domaine paramétrique vers l'objet par une méthode des moindres carrés non linéaires. La non-linéarité permet l'inclusion de contraintes garantissant l'injectivité locale de la déformation. De plus, la déformation du domaine paramétrique au lieu de l'objet lui-même permet l'utilisation de domaines plus généraux. Finalement, la troisième contribution est une approche non linéaire basée sur les angles dièdres. Nous développons une méthode définissant la déformation de l'objet par les angles dièdres au lieu des positions des sommets du maillage. Ce changement de variables permet une expression naturelle des bornes de distorsions de la déformation. Les applications de cette nouvelle approche sont la paramétrisation, l'interpolation, l'optimisation et la compression de maillages tétraédriques.

Ces trois approches ont été présentées dans les conférences internationales *Shape Modeling International*, *Symposium on Geometry Processing* et *SIGGRAPH*, et sont parues dans les revues *Computers & Graphics* [PP12a], *Computer Graphics Forum* [PPL13] et *ACM Transactions on Graphics* [PRP⁺15] respectivement.

1.2 Plan de la thèse

Nous débutons par une présentation des travaux reliés à la conformité et à la quasi-conformité au chapitre 2. Nous présentons les travaux sur les méthodes de paramétrisation de surfaces, puis sur les approches récentes sur la paramétrisation de volumes. Les travaux reliés concernant une seule contribution sont présentés dans le chapitre correspondant directement à son sujet. Les trois chapitres subséquents correspondent à chaque contribution. Au chapitre 3, nous présentons l'approche de paramétrisation linéaire dans laquelle le solide est déformé vers son domaine paramétrique. Au chapitre 4, nous présentons l'approche non linéaire basée sur les positions, où c'est le domaine paramétrique qui est déformé pour s'ajuster au solide. Au chapitre 5, nous présentons l'approche non linéaire basée sur les angles dièdres. Dans ce chapitre, nous démontrons que la géométrie du maillage est complètement déterminée par ses angles dièdres. Nous présentons la preuve d'équivalence entre ces angles et les positions de sommets, une méthode pratique pour la déformation en terme d'angles et une méthode robuste pour retrouver les positions à partir de ces angles. Nous présentons également quelques applications de cette approche. Finalement, nous faisons le point sur les contributions de nos travaux au chapitre 6 et proposons quelques pistes pour des travaux futurs.

Chapitre 2

État de l’art

Dans ce chapitre, nous faisons une brève revue des techniques de paramétrisation surfacique qui seront utiles pour la suite de cette thèse. Puis, nous faisons un état de l’art plus détaillé de la paramétrisation volumique, étant donné le sujet de cette recherche.

2.1 Paramétrisations surfaciques

Avant de traiter des volumes, il est important de faire une revue du cas des surfaces. Premièrement, nous notons quelques différences entre les paramétrisations *locales* et *globales*. Les paramétrisations locales sont spécialisées pour les surfaces ayant la topologie d’un disque. Si la surface n’a pas cette topologie, elle doit être découpée en plusieurs composantes. La paramétrisation d’une composante est appelée une *carte locale* et l’ensemble des cartes locales est appelé un *atlas*. Les liens permettant le transfert d’informations entre chacune de ces cartes locales sont appelés les *fonctions de transition*. Les domaines paramétriques populaires pour une carte locale sont le disque unitaire, le carré unitaire et les formes libres permettant une distorsion minimale. La figure 2.1 (gauche) donne un exemple d’une paramétrisation où le domaine est de forme libre et où l’objet a dû être découpé afin d’avoir la topologie d’un disque. Les paramétrisations globales, quant à elles, n’ont qu’une seule carte, et donc, ne nécessitent ni atlas ni fonctions de transition. Le domaine paramétrique peut alors être plus général, tels que les domaines périodiques de \mathbb{R}^2 et les surfaces de même genre en \mathbb{R}^3 .

Nous séparons la revue de ces algorithmes en deux catégories : les paramétrisations conformes et les paramétrisations quasi-conformes.

Paramétrisations conformes Comme mentionné précédemment, une paramétrisation conforme est une déformation préservant les angles. En pratique, il existe plusieurs façons de quantifier la distorsion des angles lors de la transformation. Nous présentons ces différentes formulations et leurs variantes. Il

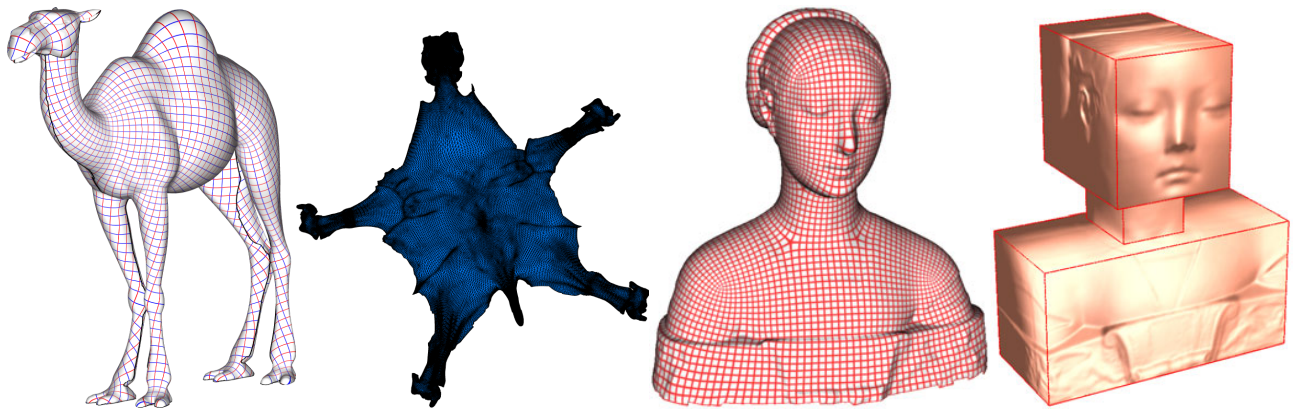


Figure 2.1 – Exemples de paramétrisations dont les domaines sont une forme libre ayant la topologie d’un disque (gauche) [HPS08] et un polycube (droite) [HWFQ09].

est important de préciser que pour des maillages linéaires par parties, il n’existe pas, au sens strict, de paramétrisation conforme car le manque de degrés de liberté oblige à avoir des discontinuités dans la transformation. Néanmoins, nous appelons *conformes* les algorithmes qui approchent la conformité lorsque le maillage est raffiné.

Les premières méthodes à avoir été popularisées sont les méthodes linéaires basées sur les coordonnées barycentriques [EDD⁺95, Flo97, DMA02, Flo03]. Elles reposent sur l’approximation de la déformation de chacun des triangles et de l’évolution de la position de chacun des sommets du maillage en fonction des forces induites par les triangles adjacents à la manière d’un système masses-ressorts. Les forces sont calculées en fonction de la forme de chaque triangle et le résultat est généralement indépendant de la combinatoire. On peut également discrétiser la définition de conformité décrite par les équations de Cauchy-Riemann [LPRM02]. Les coordonnées locales, telles que les formes différentielles [GY03] ou les fonctions trigonométriques [RLL⁺06], permettent d’assurer une cohérence entre les éléments voisins sans découpage, menant à des paramétrisations globales. Une méthode linéaire récente est basée sur l’expression de la métrique de conformité par les quaternions [CPS11]. Cette représentation permet une optimisation en laissant la surface évoluer dans un espace 3D sans contrainte de domaine, tout en restant une transformation conforme.

D’autres méthodes utilisent plutôt des métriques non linéaires. Quoique plus coûteuses en temps de calcul, elles donnent généralement un résultat plus fiable que les méthodes linéaires. Certaines

méthodes redéfinissent le problème en effectuant un changement de variables. Une première série de techniques utilisent les angles aux coins des triangles comme variables. La première définition d'une telle paramétrisation a été conçue par Di Battista et Vismara [DBV93] pour dessiner des graphes planaires. Cette méthode a été introduite à la communauté graphique pour la paramétrisation conforme de surfaces [SdS01]. Quelques travaux subséquents ont été consacrés à l'amélioration de son efficacité, incluant les travaux de Sheffer et al. [SLMB05] qui exploitent la structure des contraintes pour diminuer significativement les temps de calcul. La vitesse de convergence a aussi été améliorée en reformulant les contraintes non linéaires [ZRS05] et en linéarisant le problème [ZLS07]. D'autres méthodes optent plutôt pour la longueur des arêtes comme variables. Leur but est alors de trouver de nouvelles longueurs telles que la surface soit restructurable en 2D et que les angles soient préservés [BCGB08, SSP08, YGL⁺09]. Finalement, on peut exploiter la propriété de préservation des angles par l'observation qu'un cercle infinitésimal défini sur le domaine paramétrique restera un cercle lors de la transformation, menant à la méthode de *circle packing* [KSS06].

Nous présentons maintenant les méthodes utilisant des domaines paramétriques topologiquement équivalents à la surface. Ce sont les méthodes qui nous intéressent le plus lors du traitement des solides car le domaine est intrinsèquement volumique, même si on ne représente que la surface. Cependant, ces méthodes sont non linéaires car le domaine est lui-même non linéaire, ce qui force à avoir recours à des méthodes de résolution d'équations plus complexes.

Pour les objets de genre zéro, le domaine le plus simple et le plus populaire est la sphère. Attrayante surtout pour sa simplicité géométrique et analytique, elle a été étudiée dans le cadre de plusieurs méthodes [PH03, SGD04, APH05, FSD05]. Un autre domaine utilisé pour cette topologie est la surface du cube unitaire, où il est surtout populaire pour les *environment maps* [Gre86] et les représentations exploitant le GPU.

Pour les objets dont la géométrie est complexe, l'énergie de déformation vers une sphère ou un cube peut être très élevée, rendant la paramétrisation instable et son utilisation limitée. Pour corriger cela, on peut prendre un domaine de géométrie plus complexe qui se rapproche plus de la surface à paramétriser. De façon générale, on appelle ces objets des complexes de base, c.à.d. des surfaces qui approchent la surface initiale tout en étant plus régulières. Certaines méthodes utilisent un complexe simplicial

comme complexe de base [LSS⁺98, GVSS00, PSS01, KLS03], obtenu par une simplification du maillage initial.

D'autres méthodes utilisent un *polycube* [THCM04, WJH⁺08, HWFQ09, WYZ⁺11, XGH⁺11], où un polycube est un ensemble de cubes assemblés de telle sorte que sa forme externe approche celle de la surface initiale (voir la figure 2.1 (droite)). Le maillage est ensuite mis en correspondance avec la surface du polycube puis optimisé de façon à ce que la position des sommets minimise une certaine métrique.

Paramétrisations quasi-conformes La préservation des angles peut parfois provoquer une forte distorsion de l'aire de certaines régions de la surface. Pour minimiser cette distorsion, on relaxe la contrainte de préservation des angles en permettant une certaine quantité de cisaillement. On obtient alors les paramétrisations quasi-conformes. Ce type de fonctions a d'abord été étudié par Grötzsch [Grö28] et approfondi par Ahlfors [Ahl66].

Des paramétrisations quasi-conformes ont été premièrement calculées sur des disques topologiques résolvant l'équation de Beltrami avec un coefficient de Beltrami déterminé [Dar93]. En utilisant les valeurs singulières des matrices jacobiniennes de chacun des triangles, on peut définir des mesures d'énergie permettant d'optimiser l'isométrie [HG99] ou de minimiser l'étirement local [SSGH01]. On peut également affecter un poids à différentes métriques afin de pouvoir obtenir un résultat possédant de bonnes propriétés moyennes [DMK03]. Une autre méthode permet de corriger une paramétrisation initiale en bornant la distorsion maximale définie par les valeurs singulières. Zeng et al. [ZLYG09] proposent une méthode de paramétrisation quasi-conforme à partir de coefficients de Beltrami sur des domaines non simplement connexes. Lipman et al. [LKF12] développent une formule analytique pour la transformation quasi-conforme extrémale d'un quadrilatère par ses quatre sommets. Weber et al. [WMZ12] proposent une méthode calculant une paramétrisation quasi-conforme extrémale étant donnés un disque topologique et des conditions aux frontières. Deux de ces auteurs, Weber et Zorin [WZ14], donnent les conditions nécessaires sur la combinatoire d'un maillage pour qu'il admette une déformation injective étant données des conditions aux frontières. Les méthodes de déformations définies par l'interpolation du déplacement de plusieurs points disposés sur la surface

peuvent également borner la distorsion maximale [PL14].

2.2 Paramétrisations volumiques

Nous présentons maintenant les techniques de paramétrisation volumique. Nous ne ferons pas de distinction entre les paramétrisations conformes et quasi-conformes car à l'exception de quelques déformations triviales, seule la quasi-conformité peut exister en 3D.

Les techniques de paramétrisation volumique ont fait leur apparition dans le domaine de l'infographie en 2003 lorsque Wang et al. [WGY03] ont introduit une méthode simple de paramétrisation harmonique. Cette méthode consiste à paramétriser la surface d'un solide de genre zéro vers la sphère pour ensuite relaxer les sommets internes du solide afin de respecter la contrainte harmonique d'une manière s'apparentant à la diffusion de la chaleur dans un solide. Soit une fonction $\mathbf{f} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie sur un solide V , on définit la paramétrisation harmonique par la solution au problème suivant,

$$\begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \partial V \\ \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ est la paramétrisation de surface pré-calculée. La discrétisation de ce système d'équations différentielles pour maillage tétraédrique est un système d'équations linéaires qu'on résout par une méthode numérique telle que le gradient conjugué. Cette méthode a été appliquée à l'imagerie médicale pour la paramétrisation de modèles de cerveaux volumiques [WGC⁺04]. Quoique cette technique ne soit pas restreinte aux objets de genre zéro, les auteurs ne décrivent pas comment l'utiliser dans une configuration plus générale.

Plusieurs articles sont parus sur le sujet à partir de l'année 2007. La méthode des solutions fondamentales utilise la métaphore des charges électriques afin de calculer une paramétrisation harmonique entre deux espaces ayant la même topologie [LGW⁺07, LGW⁺09]. Cette méthode consiste à déposer des charges ponctuelles près de la surface du solide, sans toutefois lui toucher, et affecter à chacune de ces charges une position correspondante près de la surface du domaine. Cette affectation se fait en résolvant une équation linéaire construite à partir de la solution fondamentale de l'opérateur de

Laplace, qui constitue le coeur de l'algorithme. Une fois cette affectation surfacique faite, les charges induisent une paramétrisation volumique par extension des correspondances calculées pour la surface. Pour chaque sommet interne, sa position dans le domaine paramétrique est calculée par une somme pondérée des valeurs des charges l'entourant, où le poids accordé à chacune des charges se calcule en fonction de la solution fondamentale. Cette méthode est améliorée en alignant les traits saillants sur ceux du domaine [LXW⁺10]. Une paramétrisation bijective peut être garantie dans le cas particulier où le domaine est une partie étoilée et le domaine est la boule unitaire [Li10, XHH⁺10].

Xia et al. [XHY⁺10] paramétrisent le solide vers un polycube [THCM04] décomposé en un plancher, des murs et un plafond. Cette technique s'exécute en trois étapes. La première étape consiste à paramétriser la surface du solide vers le polycube à l'aide d'une des méthodes globales utilisant un domaine régulier, telles que décrites à la section 2.1. La deuxième étape est de calculer une fonction harmonique scalaire à l'intérieur du solide et une autre à l'intérieur du polycube. En notant le plancher B_f et le plafond B_c , on a les contraintes suivantes

$$\begin{cases} f_i(\mathbf{x}) = 0 & \text{si } \mathbf{x} \in B_f \\ f_i(\mathbf{x}) = 1 & \text{si } \mathbf{x} \in B_c \\ \Delta f_i(\mathbf{x}) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où f_i est la fonction définie dans le polycube ($i = 0$) ou dans le solide ($i = 1$). En calculant le gradient des fonctions, on obtient un champ vectoriel qui permet de relier chaque plancher à son plafond, tel qu'illustré par la figure 2.2. La dernière étape est de prendre chaque sommet interne au solide, puis de suivre la direction du gradient jusqu'à la rencontre du plancher, en notant la valeur de la fonction harmonique au point original du sommet. Le choix d'aller vers le plancher est arbitraire car il est équivalent d'aller dans le sens contraire pour rencontrer le plafond. Ce point d'intersection a un point correspondant sur le polycube étant donnée la paramétrisation de surface préalablement calculée. Il suffit maintenant de suivre la direction du gradient dans le polycube jusqu'à ce qu'on atteigne la valeur de la fonction harmonique précédemment notée. L'assignation de coordonnées dans le domaine paramétrique pour chacun des sommets du solide constitue la paramétrisation. Il ne s'agit pas d'une paramétrisation harmonique même si les fonctions utilisées le sont, car en général, la composition de fonctions harmoniques ne résulte pas en une fonction harmonique.

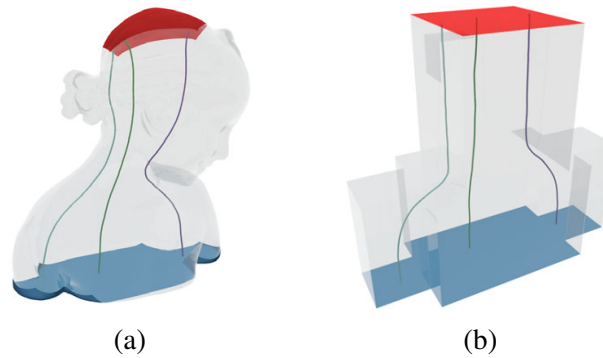


Figure 2.2 – Champ vectoriel obtenu en dérivant une fonction harmonique scalaire calculée dans (a) le solide et (b) le polycube associé au solide. Images tirées de [XHY⁺10].

Une autre catégorie de méthodes utilise les volumes paramétriques trivariés afin d’approcher la forme du solide. Les volumes paramétriques trivariés sont une généralisation des courbes et surfaces paramétriques telles que les courbes B-splines et les surfaces de Bézier. Une première méthode permet d’approcher un solide de genre zéro par une B-spline trivariée dont les points de contrôle sont disposés sous forme cylindrique [MCK09a]. La procédure est de paramétriser le volume vers le cylindre unitaire, puis d’optimiser les points de contrôle afin que l’approximation soit le plus près possible de la forme originale. La paramétrisation volumique se fait en calculant un squelette du solide puis en paramétrisant la surface vers le cylindre en utilisant le squelette comme guide. La correspondance des points intérieurs est alors induite par les iso-lignes paramétriques de surface et par le gradient d’une fonction harmonique scalaire calculée à l’intérieur du volume. Par une procédure itérative, on peut alors approcher le volume par la B-spline en déplaçant les points de contrôle de telle sorte que les iso-surfaces de la B-spline correspondent aux iso-surfaces paramétriques. On peut généraliser ce concept aux solides de topologie arbitraire et aux T-splines trivariées [MC10]. Au lieu d’utiliser un squelette unidimensionnel, une membrane médiane couvre la majeure partie de l’intérieur du solide. Cette membrane est utilisée pour segmenter le volume en plusieurs sous-volumes de genre zéro. Chacun de ces sous-volumes est ensuite paramétrisé en respectant les interfaces entre chaque sous-partie. Chaque sous-volume est alors approché par une T-spline qui peut être raffinée localement pour plus de précision. On peut finalement généraliser aux squelettes volumiques, où un petit maillage volumique est plongé dans le solide [LZLW15]. On segmente ensuite le reste du volume en joignant les sommets et les arêtes du squelette à la surface du solide. Puis, on paramétrise chaque segment pour

construire la T-spline trivariée.

La dernière méthode de cette catégorie généralise le concept de polycube afin d'y introduire une notion différente de la connexité des faces [LLWQ10]. L'idée est d'encoder la connexité entre chaque cube du polycube pour chacune de ses six faces. Cet encodage comprend le cube adjacent, sa face ainsi que l'orientation relative à celle-ci. Tel qu'illustré par la figure 2.3, on peut ainsi générer un ruban de Möbius volumique avec quatre cubes en associant chaque face à son opposée, et en appliquant une rotation de 180 degrés sur une de ces associations. Un domaine paramétrique arbitraire peut être découpé en de plus petites parties formant un polycube généralisé pour faciliter la paramétrisation [KW14].

Une technique issue du domaine de la transluminescence produit une paramétrisation en appliquant la surface du solide à l'aide d'une métrique basée sur la longueur des arêtes [WZT⁺08]. La première étape est de paramétriser la surface du solide vers la surface d'un polycube approchant la forme du solide. La deuxième étape consiste à placer une première couche de sommets du polycube à l'intérieur du solide de façon à ce que les arêtes reliant ces sommets à la surface soient perpendiculaires. Une fois la première couche paramétrisée, les sommets internes restants sont optimisés afin que la longueur des arêtes soit le plus uniforme possible. Cette technique est ensuite utilisée pour calculer la propagation de la lumière à l'intérieur du solide dans le domaine paramétrique, considérant les distorsions induites par la paramétrisation.

Yin et al. [YJLG09] paramétrisent des volumes de topologie complexe vers l'espace volumique hyperbolique en utilisant un flot géométrique discret. Cette méthode généralise aux volumes le fait

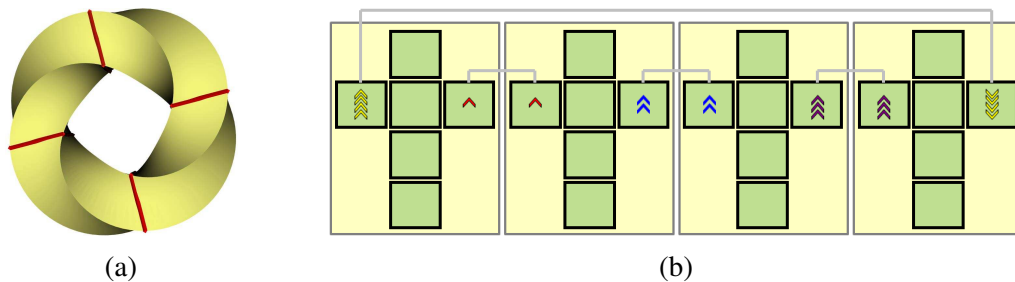


Figure 2.3 – (a) Ruban de Möbius volumique obtenu en assemblant (b) quatre cubes formant un polycube dont les faces ont été collées respectant certaines règles d'association et de rotation. Images tirées de [LLWQ10].

qu'une surface de genre deux ou plus se paramétrise vers le plan hyperbolique sans aucune singularité. Sans décrire la méthode de paramétrisation directement, les auteurs donnent les équations servant à généraliser la notion de courbure au cas volumique, qui est requis pour le flot. Ils décrivent aussi la structure hyperbolique et la façon de la réaliser à l'aide de tétraèdres hyperboliques tronqués discrets.

Aigerman et Lipman [AL13] présentent une méthode qui améliore une paramétrisation initiale, pouvant contenir des tétraèdres inversés, en bornant les distorsions. Le but de l'algorithme est d'optimiser les valeurs propres de la matrice jacobienne de chaque tétraèdre. Ce problème non linéaire est linéarisé pour simplifier sa résolution. On relinéarise et on réoptimise le problème avec la solution précédente jusqu'à convergence, qui est observée lorsque les valeurs propres sont à l'intérieur des bornes fixées par l'utilisateur. Une autre méthode utilise des contraintes sur les valeurs singulières pour borner les distorsions [KABL14]. Leur formulation a l'avantage de pouvoir contrôler la qualité et la continuité de la déformation en plus de la distorsion maximale.

Les méthodes de maillages hexaédriques peuvent parfois s'apparenter aux techniques de paramétrisation volumique. Introduites récemment, certaines d'entre elles s'en rapprochent assez pour les mentionner dans cette section. La première technique transforme le solide à mailler vers un polycube calculé automatiquement [GSZ11] (voir la figure 2.4(a)). La construction du polycube se fait en tentant d'aligner les éléments de la surface du solide afin qu'ils soient alignés sur les axes au sens des moindres carrés. La forme ainsi obtenue est donc très proche d'être un polycube. La structure polycubique est ensuite extraite à partir du résultat précédent, et modifiée par l'application de quelques corrections topologiques. L'approximation est ensuite optimisée pour que l'objet soit parfaitement concordant avec le polycube extrait. La correspondance du solide vers le polycube constitue la paramétrisation et le solide peut ainsi être maillé par l'hexaédrisation du polycube. Les singularités sont ensuite réduites par un post-traitement sur les hexaèdres de frontière. Une version plus robuste de cette méthode a été développée pour corriger certaines erreurs de la combinatoire fournie par la méthode originale [LVS⁺13]. La méthode présentée par Huang et al. [HJS⁺14] minimise quant à elle la norme L_1 des normales de la surface pour construire le polycube en même temps que de calculer la paramétrisation.

Une deuxième technique débute avec un maillage hexaédrique simple plongé dans le solide [LT12]. Ce maillage est construit et orienté par suivant champ vectoriel obtenu d'après les données fournies

par l'utilisateur. Un champ scalaire harmonique est premièrement généré dans tout le volume, ayant la valeur 0 au maillage interne et la valeur 1 à la frontière du solide. On utilise ensuite le gradient de ce champ scalaire, pointant vers la frontière, pour guider l'ajout de nouveaux hexaèdres autour du maillage initial. On continue cette procédure jusqu'à ce que le volume soit complètement maillé.

Une autre technique, nommée *CubeCover* [NRP11], est une généralisation de la technique de maillage quadrangulaire *QuadCover* [KNP07]. Contrairement aux autres méthodes, celle-ci ne paramétrise pas le solide vers un autre espace facilement maillable. Elle prendra plutôt en entrée un champ vectoriel défini à l'intérieur du solide pour guider l'orientation des hexaèdres. Ce champ vectoriel est donné par l'utilisateur et devrait idéalement suivre la forme de l'objet afin d'optimiser la qualité du maillage. Chaque hexaèdre est considéré comme une carte locale où les faces sont reliées entre elles par un encodage de la rotation à effectuer afin d'être face à la face de l'hexaèdre voisin. L'orientation de chacun des hexaèdres est ensuite optimisée pour être alignée sur le champ vectoriel donné en entrée. L'ensemble des hexaèdres munis de leurs relations de voisinage constitue la paramétrisation. La génération d'un champ vectoriel est complexe [HTWB11] et peut nécessiter plusieurs corrections afin qu'il soit valide [LLX⁺12, JHW⁺14].

Coques minces La paramétrisation de coques minces est aussi considérée comme étant volumique car une coque mince est une surface dont l'épaisseur joue un rôle important. Une première méthode utilise un polycube qui approche le solide afin de créer un maillage hexaédrique de la coque [HXH10] (voir la figure 2.4(b)). À l'aide d'une surface S d'une épaisseur d et d'un polycube P , on commence par paramétriser la surface vers le polycube. On décale ensuite S et P d'une distance donnée par l'utilisateur en utilisant un champ de distances défini autour de chacune des surfaces, obtenant ainsi deux coques. Une fonction harmonique scalaire est ensuite calculée à l'intérieur des deux coques en définissant les conditions aux frontières comme étant 0 à l'intérieur et 1 à l'extérieur. En utilisant le gradient de ces deux fonctions, on trace chacun des sommets internes pour trouver la correspondance dans l'autre coque, à la manière de Xia et al. [XHY⁺10]. Le maillage hexaédrique de la coque du polycube étant simple à réaliser, il est construit, puis transféré à la coque de l'objet original.

Une deuxième méthode se concentre sur la paramétrisation de modèles d'intestins [ZMKG11]. Cette

restriction permet quelques simplifications telles que la représentation du domaine paramétrique par un plan périodique d'épaisseur constante. Une paramétrisation harmonique est obtenue par l'usage des formes différentielles qui, dans ce cas, correspondent à la dérivée d'une fonction, encodées sous forme d'un scalaire à chacune des arêtes du solide. On calcule d'abord une forme différentielle harmonique pour chacune des trois composantes du système de coordonnées, soient la composante radiale, azimutale et axiale. Les formes différentielles sont ensuite intégrées pour obtenir une paramétrisation harmonique.

Une dernière méthode paramétrise un visage humain représenté sous la forme d'une coque mince [LLT11]. Les fonctions harmoniques sont aussi utilisées afin de calculer la mise en correspondance vers le cube unitaire. À la manière de Xia et al. [XHY⁺10], on utilise le gradient de trois fonctions harmoniques scalaires complémentaires calculées dans le volume défini par la coque. L'ensemble des trois vecteurs gradients de ces fonctions définissent la matrice jacobienne de la paramétrisation. De cette matrice, on en déduit une matrice orthogonale idéale, tout en conservant la longueur des vecteurs gradients. On optimise alors les trois fonctions harmoniques afin que leur gradient soit le plus près possible du vecteur orthogonalisé correspondant. Optimisées, ces trois fonctions définissent la paramétrisation.

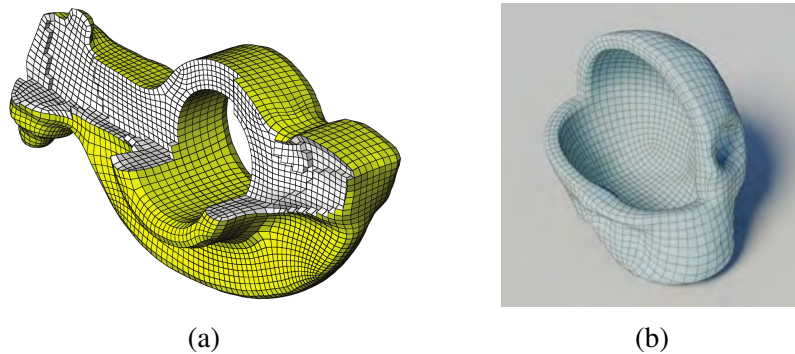


Figure 2.4 – Exemple d'un maillage hexaédrique d'un solide (a) [GSZ11] et d'un maillage de coque mince (b) [HXH10].

Chapitre 3

Paramétrisation volumique linéaire

Le travail contenu dans ce chapitre est principalement tiré de l'article *As-Conformal-As-Possible Discrete Volumetric Mapping* [PP12a], présenté à la conférence internationale *Shape Modeling International* et paru dans la revue *Computers & Graphics*.

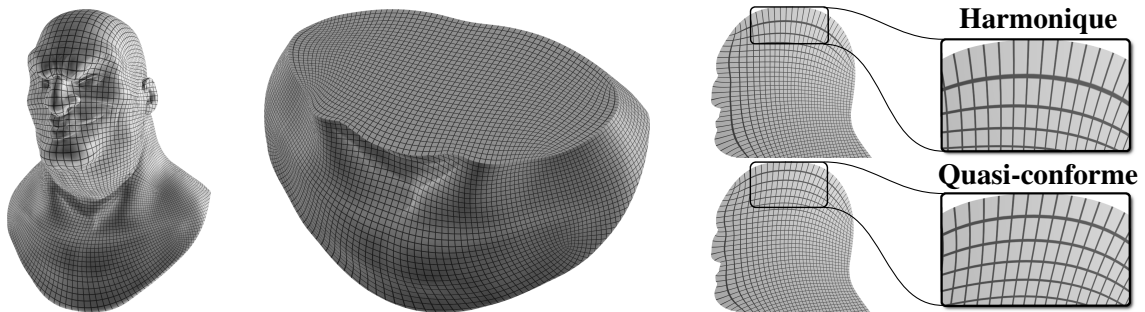


Figure 3.1 – Paramétrisation volumique quasi-conforme du modèle *Mudface* (gauche) vers un polycube, avec une coupe iso- v (centre) et une coupe iso- u (droite) du maillage. La coupe iso- u montre les différences entre la paramétrisation harmonique et la paramétrisation quasi-conforme. Notez l'amélioration de l'uniformité près des frontières.

De nos jours, la plupart des méthodes de paramétrisations volumiques linéaires sont basées sur les paramétrisations harmoniques qui sont obtenues en résolvant l'équation de Laplace. Bien qu'elles offrent de bonnes propriétés de déformations pour l'intérieur du solide, les frontières peuvent parfois subir des mises à l'échelle non uniformes importantes, telles que montrées dans la figure 3.2.

Dans ce chapitre, nous revisitons l'opérateur de Laplace en généralisant les paramétrisations conformes au contexte volumique, ce qui mène à une approximation linéaire des paramétrisations quasi-conformes volumiques (voir la figure 3.1). Il est important de rappeler que la conformité a d'importantes qualités telles que la préservation des angles et de l'aspect local. Il est donc naturel de désirer des propriétés similaires lors du passage des surfaces aux volumes.

La contrainte de conformité sur un plan unique est exprimée mathématiquement par les équations de Cauchy-Riemann, présentées plus loin. En généralisant ces équations, on obtient un opérateur matriciel

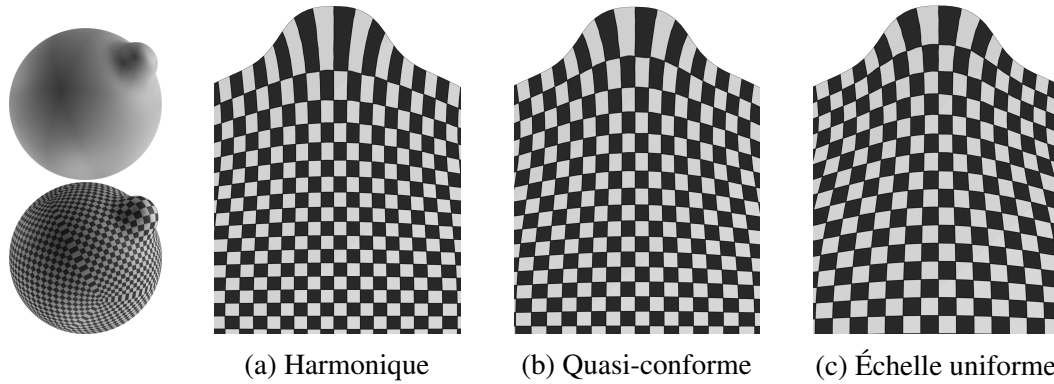


Figure 3.2 – Une coupe planaire d’une sphère bosselée (gauche) paramétrisée avec l’opérateur de Laplace (a), l’opérateur de quasi-conformité (b) et l’opérateur d’échelle uniforme (c) avec $\omega = 0.6125$, où ω est un paramètre d’uniformité (voir la section 3.5.1).

du premier ordre qui optimise la conformité dans chacun des trois plans orthogonaux canoniques, c.à.d. les plans XY , YZ et ZX . Minimiser l’erreur au sens des moindres carrés résulte en un opérateur matriciel de second ordre très simple et similaire à l’opérateur de Laplace. En fait, nous obtenons une famille d’opérateurs en utilisant les mêmes dérivations, ce qui prouve la généralité des équations introduites. En effet, nous démontrons que les contraintes d’orthogonalité et d’échelle uniforme peuvent être paramétrisées afin de contrôler le poids qu’elles auront lors de l’optimisation.

La contribution principale vient du fait qu’il s’agit d’une définition simple et pratique de la quasi-conformité volumique. La généralisation des équations de Cauchy-Riemann conjointement avec l’énergie de Dirichlet généralisée mène naturellement vers une approximation au sens des moindres carrés de la conformité discrète en 3D. Le résultat est fondamental, supporté par une bonne définition théorique et pouvant être incorporé dans plusieurs méthodes existantes sans grandes difficultés. Tel que démontré dans la section 3.4, la méthode offre de meilleurs résultats que les paramétrisations harmoniques pour les deux mesures d’énergie fournies, c.à.d. les énergies volumiques et angulaires. Bien qu’il en existe d’autres, elles sont souvent utilisées dans le domaine de la paramétrisation et correspondent à deux propriétés complémentaires qu’il est important de préserver.

Ce chapitre est organisée comme suit. La section 3.1 dérive des équations pour le cas continu alors que la section 3.2 présente une façon simple de discrétiser le système sur des maillages tétraédriques. L’algorithme complet est résumé à la section 3.3. Les résultats numériques et visuels sont présentés à

la section 3.4. Des métriques alternatives sont présentées et comparées à la section 3.5, suivies d’une discussion sur les limitations et les améliorations possibles à la section 3.6.

3.1 Cas continu

Nous rappelons que les paramétrisations conformes 2D sont des fonctions qui préservent l’aspect local de la géométrie, c.à.d. que la matrice jacobienne à chaque point de l’espace est une matrice de similitude. Soit une fonction $\mathbf{f} : S_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie sur une surface S_2 , cette contrainte est exprimée par les équations de Cauchy-Riemann

$$\begin{bmatrix} \partial_x & -\partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} = 0.$$

En 3D, on sait que la contrainte de préservation de l’aspect local est trop forte pour être respectée parfaitement. Cependant, elle peut être optimisée pour un résultat qui s’approche le plus possible de la conformité exacte. Suivant ce raisonnement, nous proposons d’appliquer les équations de Cauchy-Riemann sur chacun des trois plans canoniques orthogonaux afin de maximiser la rigidité locale. Soit une fonction $\mathbf{f} : S_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie sur un solide S_3 , nous définissons la nouvelle contrainte $\mathcal{D}\mathbf{f} = 0$ où

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} 0 & \partial_y & -\partial_z \\ 0 & \partial_z & \partial_y \\ \partial_x & 0 & -\partial_z \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ \partial_x & -\partial_y & 0 \\ \partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Cet opérateur n’est malheureusement pas invariant par rotation car chaque équation considère que le plan correspondant ne changera pas son orientation lors de la transformation. Une solution est d’utiliser une technique empruntée à l’animation basée physique, nommée *warped stiffness* [MDM⁺02], qui consiste à retirer la composante rotationnelle de la transformation avant d’appliquer l’opérateur. Soit \mathbf{R}

la rotation locale à un point \mathbf{x} , l'opérateur corrigé est

$$\mathcal{D}\mathbf{R}^T \mathbf{f} = 0.$$

Sous cette forme, la matrice jacobienne de \mathbf{f} est surcontrainte. C'est pourquoi nous proposons de l'optimiser au sens des moindres carrés. Pour cela, nous minimisons la fonctionnelle d'énergie suivante

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{S}_3} |\mathcal{D}\mathbf{R}^T \mathbf{f}|^2 dV.$$

où dV est un élément de volume du solide \mathcal{S}_3 .

3.2 Cas discret

Afin de calculer ces transformations numériquement, nous discrétisons l'espace et les fonctions définies sur cet espace. Soit M un maillage tétraédrique formé des sommets V et des tétraèdres T . Une fonction $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ est définie sur M en associant une valeur à chaque sommet et en interpolant linéairement ces valeurs à l'intérieur des tétraèdres. Soit $t \in T$ un tétraèdre de volume signé V_t ayant les valeurs de fonction \mathbf{f}_i définies aux sommets v_i . L'interpolation barycentrique au point \mathbf{x} est définie par

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{3V_t} \sum_{i=1}^4 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{f}_i \quad (3.1)$$

où \mathbf{n}_i est la normale externe de la face opposée au i -ième sommet du tétraèdre et où la norme de cette normale est égale à l'aire de cette face opposée. Cette notation est illustrée par la figure 3.3.

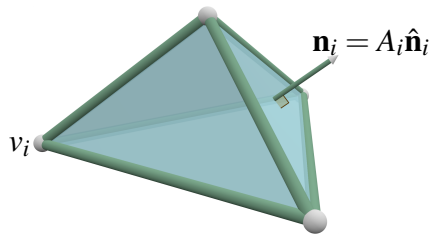


Figure 3.3 – Notation d'un tétraèdre : A_i est l'aire de la face opposée au sommet v_i , $\hat{\mathbf{n}}_i$ est la normale unitaire de la face, et \mathbf{n}_i est la normale pondérée par l'aire de la face.

Les contraintes étant appliquées aux valeurs de la matrice jacobienne, nous calculons cette dernière en différenciant l'équation (3.1) pour obtenir

$$J = -\frac{1}{3V_t} \sum_{i=1}^4 \mathbf{f}_i \otimes \mathbf{n}_i$$

où \otimes est le produit dyadique.

Ayant calculé toutes les dérivées, nous définissons maintenant l'opérateur de quasi-conformité discret D sur le tétraèdre par

$$D\mathbf{f} = -\frac{1}{3V_t} \sum_{i=1}^4 \mathbf{D}_i \mathbf{f}_i$$

où \mathbf{D}_i est définie par

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} 0 & n_{i,y} & -n_{i,z} \\ 0 & n_{i,z} & n_{i,y} \\ n_{i,x} & 0 & -n_{i,z} \\ n_{i,z} & 0 & n_{i,x} \\ n_{i,x} & -n_{i,y} & 0 \\ n_{i,y} & n_{i,x} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Pour la suite, une technique similaire à celle présentée par Lévy et al. [LPRM02] et Wang et al. [WGY03] est utilisée pour dériver la formulation par les moindres carrés. L'objectif est de minimiser une fonctionnelle d'énergie définie sur tout le maillage tétraédrique. La fonction discrétisée étant linéaire par morceaux, nous définissons l'énergie sur chaque tétraèdre individuel. Soit $t \in T$ un tétraèdre et \mathbf{R}_t la rotation précalculée, la fonctionnelle d'énergie est définie par

$$E_t = \frac{1}{2} \int_t \|\mathbf{D}\mathbf{R}_t^T \mathbf{f}\|^2 dV_t.$$

Pour obtenir un système d'équations linéaires, nous dérivons l'énergie discrétisée à chaque sommet

$v_i \in V$ en utilisant l'ensemble des sommets voisins $\mathcal{N}(v_i)$, donnant

$$\sum_{j \in \mathcal{N}(v_i) \cup \{i\}} \mathbf{K}_{ij} \mathbf{f}_j = 0 \quad (3.3)$$

où \mathbf{K}_{ij} est la matrice définie par

$$\mathbf{K}_{ij} = \sum_{t \in T(v_i, v_j)} \frac{\mathbf{R}_t \mathbf{D}_{t,i}^T \mathbf{D}_{t,j} \mathbf{R}_t^T}{9V_t}$$

où $T(v_i, v_j)$ sont les tétraèdres partageant l'arête $\{v_i, v_j\}$ et où $T(v_i, v_i)$ sont les tétraèdres partageant le sommet v_i .

3.3 Algorithme

Nous utilisons des solveurs d'équations standard à chaque étape de la technique pour résoudre le système défini par l'équation (3.3) et ainsi obtenir la paramétrisation volumique quasi-conforme. Voici un résumé de chacune de ces étapes.

3.3.1 Paramétrisation surfacique

La première étape consiste en la paramétrisation de la surface vers la surface du domaine en utilisant n'importe quelle méthode globale. Il est cependant important de noter que la qualité de la paramétrisation surfacique affectera grandement la qualité de la paramétrisation du volume. Par exemple, les singularités ou les inversions de triangles pourraient être propagées sur une certaine distance à l'intérieur du solide. Toutefois, tant que la paramétrisation de la surface est appropriée, de bons résultats devraient être attendus.

Pour nos tests, les domaines utilisés sont le cube, la sphère ou le polycube. Ce choix repose sur la capacité du codomaine à approcher la forme géométrique de l'objet. À l'exception des objets simples, des polycubes sont utilisés comme codomaine de préférence. La paramétrisation de la surface est conforme et calculée par l'algorithme du gradient avec un pas adaptatif. Le nombre d'itérations est

approximativement le même que le nombre de sommets de la surface. Le seuil utilisé pour l'arrêt de l'algorithme est 10^{-5} en utilisant la moyenne des carrés des erreurs résiduelles.

3.3.2 Paramétrisation volumique harmonique

La deuxième étape sert à calculer la première approximation de la partie volumique de la paramétrisation basée sur les travaux de Wang et al. [WGY03]. En utilisant les équations de la section 3.2, nous obtenons un système linéaire pour la paramétrisation harmonique en modifiant les matrices $\mathbf{K}_{i,j}$. Nous définissons les nouveaux coefficients de l'équation (3.3) par

$$\tilde{\mathbf{K}}_{i,j} = \sum_{t \in T(v_i, v_j)} \frac{\mathbf{n}_{t,i} \cdot \mathbf{n}_{t,j}}{9V_t}.$$

On obtient alors un système d'équations linéaires symétrique que nous résolvons avec une méthode de gradient conjugué avec un préconditionneur de Jacobi, en fixant la position des sommets de la surface. Le nombre d'itérations est habituellement autour de 150 pour chaque maillage avec un seuil fixé à 10^{-8} .

3.3.3 Rotations locales et coefficients

La paramétrisation harmonique obtenue à l'étape précédente est maintenant utilisée pour calculer la rotation locale à chaque sommet. En utilisant ces rotations, nous calculons les coefficients $\tilde{\mathbf{K}}_{ij}$.

3.3.4 Paramétrisation volumique quasi-conforme

La dernière étape est de calculer la paramétrisation volumique quasi-conforme définie par notre opérateur en résolvant l'équation (3.3) en utilisant une méthode de gradient conjugué avec un préconditionneur de Jacobi. Le nombre d'itérations est habituellement autour de 150 pour chaque maillage avec un seuil fixé à 10^{-8} .

Nous avons observé que de mettre à jour les rotations locales puis de réitérer l'étape d'optimisation ne

mène pas à une amélioration perceptible, ce qui explique que nous n'évaluons les rotations qu'une seule fois.

3.4 Résultats

Cette section présente les résultats des paramétrisations volumiques obtenues en utilisant la nouvelle métrique. Quelques métriques alternatives seront aussi comparées, suivies d'une discussion mettant en évidence les différences entre ces métriques. Il faut noter que le coeur de ce travail réside dans l'introduction d'une métrique simple et rapide de calcul qui optimise la quasi-conformité. Pour cette raison, l'attention sera plutôt portée sur le comportement de chaque métrique plutôt que de la paramétrisation finale en tant qu'unité globale.

La méthode a été implémentée en C++ et tous les tests ont été effectués avec un processeur Intel[®] Xenon[®] E5520 sans aucune accélération matérielle. Le tableau 3.I montre les temps de calcul pour la partie volumique (c.à.d. en excluant la paramétrisation surfacique).

Le temps de la paramétrisation volumique quasi-conforme est approximativement de trois à quatre fois plus élevé que la version harmonique. Il est important de noter qu'en général, la majorité du temps total de la paramétrisation est absorbée par la paramétrisation surfacique, car cette partie utilise l'algorithme du gradient, qui est reconnu pour sa lenteur de convergence. Une méthode multigrille serait plus appropriée pour cette étape mais ne fait pas partie des extensions jugées utiles à ce stade-ci. En fait, le temps de calcul de la paramétrisation volumique représente généralement moins de 1% de celui de la paramétrisation de la surface, ce qui surpasse de beaucoup l'incrément ajouté par la paramétrisation quasi-conforme. Étant donnée l'amélioration de la qualité des résultats, même si parfois légère, l'étape supplémentaire de quasi-conformité en vaut la peine.

D'un point de vue qualitatif, quelques indices visuels permettent de voir une amélioration. Alors que les paramétrisations harmoniques ont de bonnes propriétés pour l'intérieur, la qualité se détériore rapidement près des frontières. Ce fait est montré sur la sphère bosselée de la figure 3.2 et il est aussi possible de remarquer ce phénomène à la figure 3.4. Le compromis offert par la paramétrisation quasi-conforme est une amélioration de la qualité des frontières, au prix d'une légère réduction de la

Maillage	V	T	Codomaine	Harmonique			Quasi-conforme		
				Temps	E_{angle}	E_{volume}	Temps	E_{angle}	E_{volume}
Sphère	10k	53k	Cube	0.18	2.246	2.096	0.89	2.225	2.063
Tore	15k	59k	Polycube	0.12	2.424	2.392	0.58	2.389	2.327
Écureuil	18k	73k	Polycube	0.15	3.118	3.453	0.84	2.706	3.110
Buste	18k	77k	Polycube	0.19	2.829	3.526	0.87	2.718	3.376
Pied	20k	89k	Polycube	0.19	2.441	2.455	0.98	2.404	2.380
Pensatore	30k	150k	Cube	0.47	2.554	2.488	2.03	2.412	2.266
Vase lion	40k	163k	Polycube	0.44	3.324	3.229	2.09	2.991	3.046
Grog	46k	197k	Polycube	0.51	3.521	3.600	2.30	3.296	3.422
Sphère bosselée	66k	307k	Sphère	2.08	2.003	2.011	5.45	2.003	2.007
			Cube	2.01	2.283	2.126	6.53	2.250	2.079
Alien Shark	185k	850k	Polycube	5.16	2.697	2.783	17.48	2.525	2.568
Human Elder	188k	877k	Polycube	5.68	2.598	2.417	30.59	2.517	2.298
Bimba Con Nastrino	203k	969k	Polycube	6.36	2.825	5.912	23.14	2.598	5.698
Chinese Lion	273k	1203k	Polycube	9.37	2.964	3.105	34.71	2.673	3.033
Kitten	342k	1968k	Polycube	23.72	2.668	4.073	74.57	2.545	3.668
Human Torso	389k	1863k	Polycube	16.33	3.056	3.910	53.91	2.808	3.703
Mudface	1183k	5569k	Polycube	48.12	2.634	3.178	154.52	2.455	2.789



Tableau 3.I – Résultats obtenus pour différents maillages. Les temps de calcul sont en secondes et la valeur optimale minimale pour les deux mesures d’énergie est 2. Une image de chaque modèle plus complexe se retrouve au bas du tableau, dans l’ordre gauche à droite.

qualité de l’intérieur. Malgré cela, la qualité totale est tout de même améliorée et l’intérieur conserve ses bonnes propriétés.

Pour évaluer quantitativement l’amélioration de la paramétrisation, une mesure angulaire et une mesure volumique sont utilisées. Les mesures sont tirées du livre de Botsch et al. [BKP⁺10] et résumées par Solomon et al. [SBCBG11]. Adaptées aux volumes, on obtient

$$E_{angle} = \frac{1}{V} \sum_{t \in T} V_t \left(\frac{\sigma_{t,min}}{\sigma_{t,max}} + \frac{\sigma_{t,max}}{\sigma_{t,min}} \right)$$

$$E_{volume} = \frac{1}{V} \sum_{t \in T} V_t \left(\sigma_{t,1} \sigma_{t,2} \sigma_{t,3} + \frac{1}{\sigma_{t,1} \sigma_{t,2} \sigma_{t,3}} \right)$$

où V est le volume total du maillage, $\sigma_{t,i}$ sont les valeurs singulières de la matrice jacobienne de

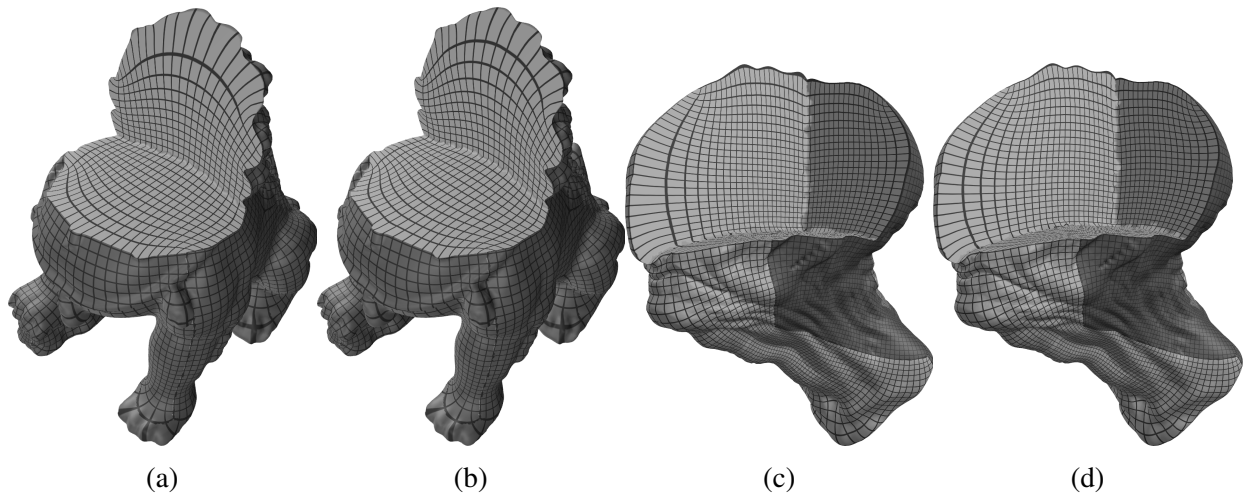


Figure 3.4 – Les résultats des paramétrisations harmoniques (a,c) et des paramétrisations quasi-conformes (b,d).

transformation des tétraèdres, et $\sigma_{t,min}$ et $\sigma_{t,max}$ sont respectivement les valeurs singulières minimum et maximum.

Ces mesures peuvent être numériquement instables près des singularités. Pour cette raison, il a été choisi d'ignorer les valeurs d'énergie plus grandes qu'un certain seuil pour éliminer le biais qu'elles introduisent. Malgré le fait qu'ignorer certaines valeurs introduise aussi un biais, le résultat reste tout de même beaucoup plus représentatif de l'énergie totale que d'incorporer des valeurs instables. Ces valeurs singulières représentent généralement moins de 0.3% du volume total, rendant le biais négligeable lors du calcul de l'énergie globale de la paramétrisation.

Ces mesures montrent une amélioration de l'énergie globale pour chacune des deux mesures pour tous les maillages testés, telle que résumée au tableau 3.I. Même si elle n'apparaît pas dans le tableau, la variance des deux mesures a beaucoup diminué. La figure 3.5 montre la distribution de l'énergie par code de couleurs d'une coupe planaire du modèle *Chinese Lion* et l'histogramme de la distribution pour l'entièreté du maillage tétraédrique.

Si on regarde les résultats du modèle *Mudface*, on peut voir que le temps de calcul est environ multiplié par trois (48.12 vs. 154.52). Cependant, si on considère que le temps de paramétrisation de la surface a pris près d'une journée, les deux minutes supplémentaires pour l'application de la métrique quasi-

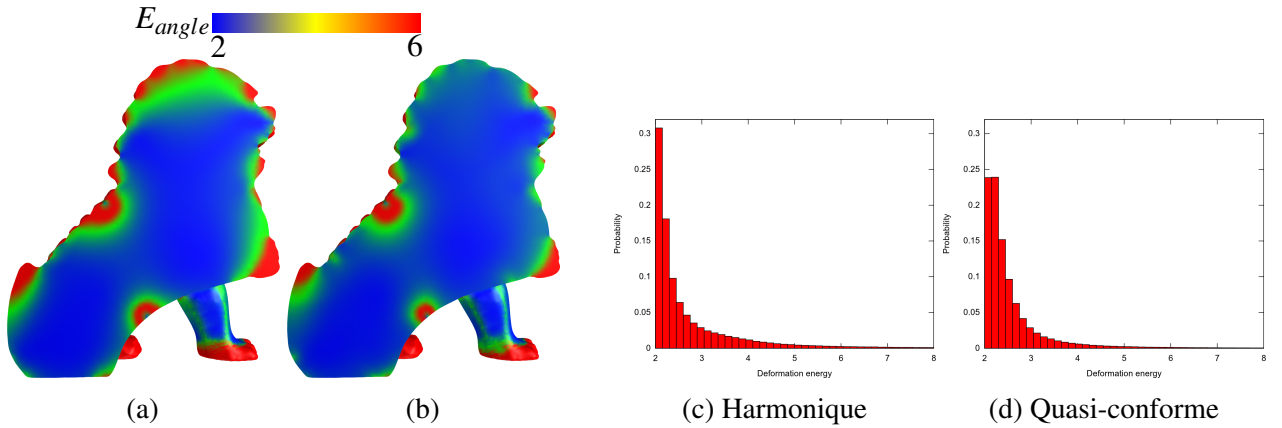


Figure 3.5 – Une mesure d’énergie du *Chinese Lion* paramétrisé sur un polycube. La distribution de l’énergie par code de couleurs d’une coupe planaire ainsi que l’histogramme associé pour la paramétrisation harmonique (a,c) et la paramétrisation quasi-conforme (b,d). Notez que 86% du volume a une valeur d’énergie en dessous de 3 pour la paramétrisation quasi-conforme en comparaison avec 76% pour la paramétrisation harmonique.

conforme sont négligeables. Pour les mesures d’énergie, on peut observer une amélioration de 28% pour l’énergie angulaire (2.634 vs. 2.445) et une amélioration de 33% pour l’énergie volumique (3.178 vs. 2.789).

Notez que l’injectivité n’est pas garantie pour de grandes déformations. En effet, des contraintes linéaires ne mènent généralement pas à des métriques dites *barrières*, c.à.d. qu’une force assez grande inversera éventuellement un tétraèdre. Pour cette raison, les domaines doivent être sélectionnés avec soin. Quoique les polycubes utilisés dans ce chapitre ont été construits à la main, Gregson et al. [GSZ11] proposent une méthode de construction de polycubes automatique et sensible à la géométrie pouvant être utilisée pour minimiser la quantité de tétraèdres inversés.

3.5 Métriques alternatives

D’autres métriques peuvent aussi optimiser la conformité en haute dimension. Du fait que la matrice jacobienne d’une paramétrisation conforme soit une matrice de similitude, la fonctionnelle d’énergie

suivante pourrait être utilisée

$$E_t = \frac{1}{2} \int_t \|\mathbf{J} - s\mathbf{R}\|^2 dV_t$$

où $s = |\mathbf{J}|^{\frac{1}{3}}$.

Nous avons trouvé que les résultats obtenus avec cette métrique étaient meilleurs que les paramétrisations harmoniques, mais pas plus que les paramétrisations quasi-conformes. Une moyenne de quatre itérations étaient nécessaires pour la convergence des maillages testés.

La métrique développée par Gregson et al. [GSZ11] peut aussi être utilisée

$$\tilde{v}_i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \tilde{v}_j = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\frac{\mathbf{R}_i + \mathbf{R}_j}{2} \right) \cdot (v_i - v_j)$$

où $N = |\mathcal{N}(v_i)|$ et \tilde{v}_i est la position transformée du maillage.

Malheureusement, cet opérateur est très dépendant de la combinatoire et moins de la géométrie du volume, à la manière d'un système masses-ressorts.

Li et al. [LLT11] développe une métrique tentant d'améliorer l'orthogonalité, mais ayant une direction préférée. Quoique l'orthogonalité soit appropriée pour leur application, le comportement est inapproprié pour des paramétrisations volumiques générales.

Les déformations à base de cages peuvent aussi être considérées comme une métrique potentielle pour la paramétrisation. La paramétrisation de la surface agit comme une cage de déformation, et ainsi, les sommets internes peuvent être transformés selon la formulation de la méthode. Les coordonnées de Green [LLCO08] n'interpolent pas la frontière, et donc, de grandes distorsions peuvent être observées près des frontières puisque des sommets peuvent se trouver à l'extérieur de la cage après la déformation. Les paramétrisations harmoniques sont déterminées uniquement par la valeur des frontières, et donc, les coordonnées harmoniques [JMD⁺07] ne sont pas considérées ici. Finalement, les coordonnées *mean value* [JSW05] donnent des résultats légèrement meilleurs que les paramétrisations harmoniques pour les maillages testés, tels que montrés au tableau 3.II, mais ces coordonnées peuvent avoir des

valeurs négatives, menant à de grandes distorsions dans les parties concaves. Cependant, le temps de calcul pour les méthodes par cages est très grand lorsque la surface contient beaucoup de sommets.

	MJS	[GSZ11]	[LLT11]	MVC
Sphere	2.242	2.258	2.234	2.245
Pensatore	2.493	2.560	2.638	2.442
Alien Shark	2.637	2.584	2.746	2.585

Tableau 3.II – Quelques mesures de l’énergie angulaire pour trois maillages. Des résultats similaires ont été obtenus pour tous les maillages testés ainsi qu’avec la mesure d’énergie volumique. Les métriques comparées sont la matrice jacobienne de similitude (MJS), la métrique de Gregson et al. [GSZ11], la métrique de Li et al. [LLT11] et les coordonnées *mean value* (MVC) [JSW05].

3.5.1 Échelle uniforme

Il est aussi possible d’introduire un paramètre à l’opérateur \mathcal{D} permettant ainsi d’ajouter un degré de liberté supplémentaire. Une telle paramétrisation pourrait simplement être faite afin de séparer la contrainte d’échelle uniforme de la contrainte d’orthogonalité en utilisant une constante $\omega \in [0, 1]$, en notant $\bar{\omega} = 1 - \omega$. Pour alléger le texte, seul le cas discret sera détaillé. Il suffit de redéfinir la matrice de l’équation (3.2) par

$$\mathbf{D}_{i,\omega} = 2 \begin{bmatrix} 0 & \omega n_{i,y} & -\omega n_{i,z} \\ 0 & \bar{\omega} n_{i,z} & \bar{\omega} n_{i,y} \\ \omega n_{i,x} & 0 & -\omega n_{i,z} \\ \bar{\omega} n_{i,z} & 0 & \bar{\omega} n_{i,x} \\ \omega n_{i,x} & -\omega n_{i,y} & 0 \\ \bar{\omega} n_{i,y} & \bar{\omega} n_{i,x} & 0 \end{bmatrix}$$

en laissant les autres équations inchangées.

Par expérimentation, nous trouvons que les meilleurs résultats sont obtenus en prenant $\omega \in [0.3, 0.7]$, $\omega = 0.5$ étant l’opérateur de quasi-conformité. Les valeurs extrêmes de ω sont à proscrire car les singularités de la paramétrisation surfacique peuvent causer la dégénérescence de la partie volumique. La figure 3.6 montre des paramétrisations calculées pour différentes valeurs de ω . On y voit que

l'opérateur de quasi-conformité reste optimal par rapport à ce degré de liberté supplémentaire. Des résultats similaires ont été obtenus pour d'autres maillages.

3.6 Discussion et conclusion

En résumé, nous avons introduit un opérateur permettant de minimiser l'énergie de quasi-conformité 3D d'une façon similaire à celle des équations de Cauchy-Riemann pour le cas 2D. Nous avons démontré que cet opérateur peut être paramétrisé pour optimiser indépendamment l'échelle uniforme de l'orthogonalité pour atteindre le résultat désiré. En fait, n'importe quel système de contraintes utilisant les dérivées de premier ordre peut être utilisé avec les mêmes dérivations. La généralisation à n dimensions est aussi triviale.

Les limitations sont que l'injectivité de la paramétrisation n'est pas garantie et que la frontière est fixe lors de l'optimisation volumique. De plus, un inconvénient est que la méthode n'est pas invariante par rotation, ce qui complexifie la méthode par l'ajout d'un prétraitement nécessitant le calcul d'une paramétrisation harmonique initiale. Nous présentons une solution à ces deux limitations et à cet inconvénient aux chapitres 4 et 5.

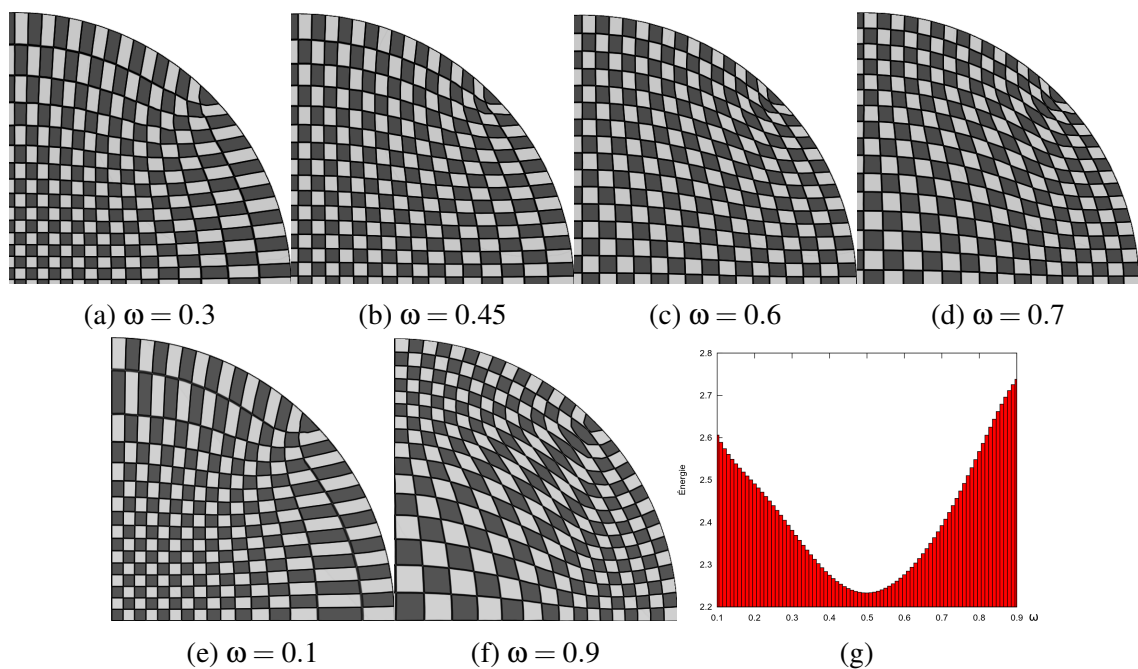


Figure 3.6 – Optimisation d'échelle uniforme d'une sphère paramétrisée vers le cube. Les valeurs extrêmes de ω (e,f) montrent des signes de dégénérescence et sont numériquement instables lors de l'optimisation. Un graphe (g) de l'énergie angulaire en fonction de la valeur de ω montre que $\omega = 0.5$ est optimal.

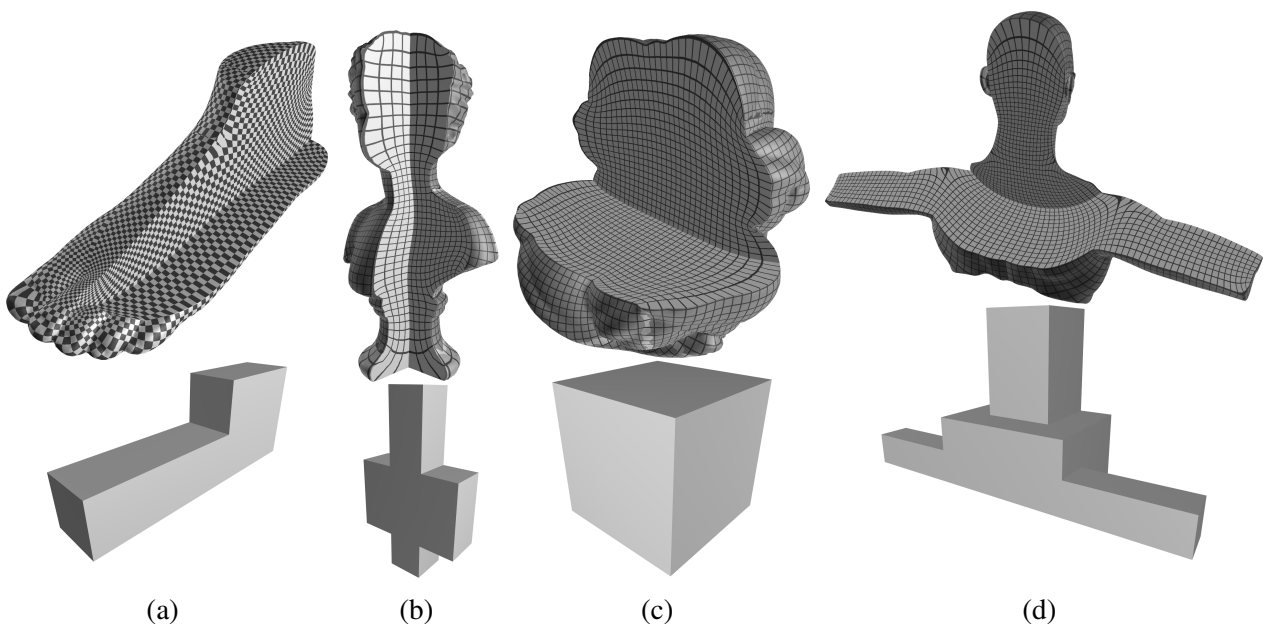


Figure 3.7 – Paramétrisation quasi-conforme du pied (a), buste (b), *Pensatore* (c) et du torse (d), avec en-dessous les codomaines utilisés pour chaque objet.

Chapitre 4

Approche non linéaire par positions

Le travail contenu dans ce chapitre est principalement tiré de l'article *Fitting Polynomial Volumes to Surface Meshes with Voronoï Squared Distance Minimization* [PPL13], présenté à la conférence internationale *Symposium on Geometry Processing* et paru dans la revue *Computer Graphics Forum*.

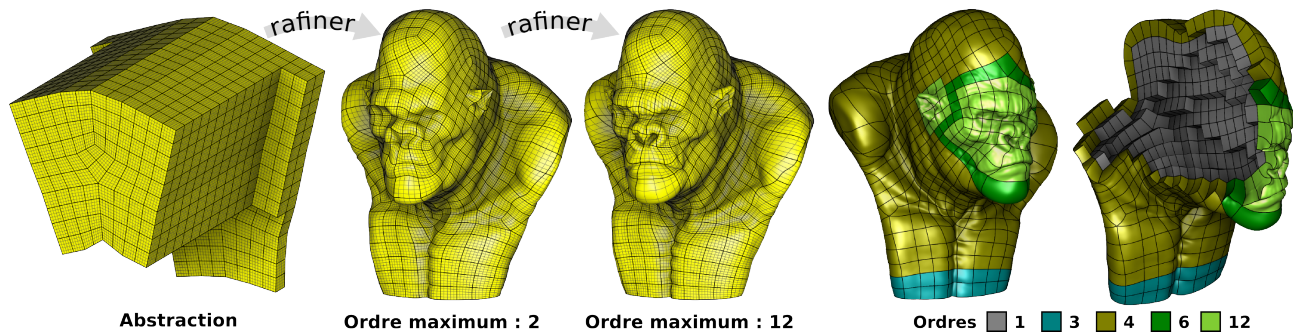


Figure 4.1 – Notre méthode ajuste une abstraction volumique initiale à un maillage surfacique utilisant des éléments finis d’ordre supérieur. Cette figure montre l’évolution de la forme initiale par incrément de l’ordre de chaque élément. Ce maillage adaptatif ne stocke que 6% de tous les noeuds que nécessiterait un maillage d’ordre 12 complet.

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode remédiant aux lacunes de l’approche linéaire, notamment les problèmes liés à l’injectivité locale, à l’invariance de la métrique par rotation et à l’optimisation de la surface en même temps que le volume.

Cette méthode est très similaire à la précédente, à l’exception que c’est maintenant le domaine qui est déformé vers le solide. Ce type d’approche est surtout utilisé pour la génération de maillages volumiques par la création d’une abstraction du solide qui est géométriquement plus simple et topologiquement équivalente, mais qui est plus facile à mailler. La différence géométrique est ensuite estompée par une étape d’ajustement qui induira un maillage volumique. Cette famille de techniques (voir la section 4.1) requiert généralement une pré-paramétrisation pour guider l’ajustement. Les techniques de paramétrisation volumique actuelles doivent premièrement déformer la surface pour ensuite propager la déformation au volume tout en gardant la surface fixe. Bien que ces approches

optimisent *indépendamment* chacune de ces étapes, elles ne permettent pas une déformation qui est *globalement* optimale.

Par opposition, notre méthode permet de faire l’ajustement sans pré-paramétrisation et de laisser la surface libre tout au long de l’optimisation. Ce degré de liberté supplémentaire permet d’améliorer encore plus la qualité des éléments du maillage. En d’autres mots, étant donnée une surface cible et son abstraction volumique, nous résolvons le problème variationnel qui consiste à déformer l’abstraction telle que sa frontière corresponde à la surface cible tout en préservant la qualité des éléments internes. Le résultat est une déformation transformant les cellules linéaires de l’abstraction en cellules courbes. Cette approche est élaborée à la section 4.2.

Nous basons l’ajustement de la surface sur la méthode *Voronoi squared distance minimization* (VSDM) [NYL12]. Cette formulation a l’avantage d’être implicitement sensible aux arêtes franches lorsque la formulation anisotrope est utilisée et de supporter les soupes de polygones ainsi que les maillages bruités contenant des éléments dégénérés (voir la section 4.3).

La qualité de la géométrie interne du solide est préservée par une métrique barrière inspirée de la mécanique des grandes déformations qui impose l’injectivité locale de la transformation.

Le problème est discrétisé par la méthode des éléments finis d’ordre élevé hiérarchiques. L’ordre élevé permet une meilleure approximation que les éléments linéaires et le caractère hiérarchique offre un contrôle facile et individuel de l’ordre de chaque cellule. Le contrôle individuel diminue la demande en mémoire et le temps de calcul là où la précision géométrique n’est pas requise. Nous introduisons également les séries de Fourier intégrées comme base hiérarchique des éléments d’ordre élevé et nous présentons quelques-uns de ses avantages face aux bases fonctionnelles traditionnelles utilisées par la communauté des éléments finis.

4.1 Travaux connexes

Nous présentons les travaux connexes en ajustement de surfaces (section 4.1.1), en ajustement de solides (section 4.1.2) et en optimisation de maillages volumiques (section 4.1.3). Une revue complète

des travaux antérieurs étant au-delà de la portée de ce chapitre, nous présentons seulement les méthodes partageant des concepts voisins de ceux présentés ici.

4.1.1 Ajustement de surfaces

La méthode par emballage [KVL99] est une procédure en deux étapes où le maillage modèle est successivement projeté sur la surface puis relaxé à l'aide d'un terme régulateur. Cette méthode a été améliorée en utilisant une énergie basée sur l'opérateur de Laplace et le maillage dual pour minimiser les repliements [YLSL11].

Les splines de variétés peuvent être ajustées à un maillage en précalculant une paramétrisation initiale pour ensuite optimiser la position des points de contrôle afin que la surface approche le maillage cible en optimisant simultanément un terme régulateur afin d'empêcher les oscillations de la solution. Le maillage de contrôle peut être un complexe simplicial [EH96], une paramétrisation périodique globale [LRL06] ou un polycube [WHL⁺07].

Pour éviter l'étape de paramétrisation, la distance à la surface peut être évaluée sans avoir recours à une paramétrisation initiale. Cette procédure peut être appliquée aux splines [PL03] et aux surfaces de subdivision [CWQ⁺04, CWQ⁺07].

La méthode VSDM [NYL12] utilise le diagramme de Voronoï d'un échantillonnage de la surface à optimiser en partitionnant le maillage cible afin de minimiser une fonctionnelle d'énergie sur les pièces de la partition. Un choix judicieux de la distribution des échantillons et de la fonctionnelle d'énergie mène à une méthode implicitement sensible aux arêtes franches, ce qui est l'objectif de ce travail.

4.1.2 Ajustement de solides

L'ajustement de solides emprunte des concepts de l'ajustement de surfaces et les étend aux volumes.

Tout comme les surfaces, quelques techniques utilisent une paramétrisation initiale puis optimisent les points de contrôle d'une spline pour les ajuster au maillage cible en se guidant par la paramétrisation. Le

maillage de contrôle peut être cylindrique [MCK09b] ou un polycube généralisé [LLWQ10, WLL⁺12]. La qualité de l’ajustement est très dépendante de la paramétrisation initiale. Les méthodes de paramétrisation existantes [WGY03, LGW⁺09, MC10, XHY⁺10, PP12a] sont très contraintes par la paramétrisation surfacique qui doit être précalculée. Cette contrainte diminue le nombre de degrés de liberté lors de l’optimisation volumique. Notre méthode élimine le besoin d’une paramétrisation en optimisant la forme de chaque élément en même temps que l’ajustement, permettant la préservation optimale et globale de la forme.

Lorsque la cible est un maillage tétraédrique, on peut éviter l’étape de paramétrisation en considérant les tétraèdres en tant que maillage de contrôle [HHQ05]. Cette procédure correspond à un changement de fonction d’interpolation où les fonctions linéaires par morceaux étendant la transformation aux volumes sont remplacées par des fonctions splines sans altérer la combinatoire. Cette contrainte empêche son application à l’ajustement de solides contenant des hexaèdres et des prismes.

L’ajustement de maillage volumique peut aussi être fait en calculant un champ de distance signée du maillage cible et en déplaçant les sommets de la surface en suivant le gradient du champ de distance tout en optimisant la forme de chaque élément par une formulation linéaire [CS09] ou non linéaire [NS10] de la mécanique des solides déformables. Cependant, les modèles élastiques utilisés dans ces méthodes ne sont pas des métriques barrières, ce qui implique que les éléments peuvent s’inverser lorsque la déformation est trop grande. De plus, l’ajustement de surface peut être coincé dans un minimum local si tous les sommets reposent sur un sous-ensemble de la surface cible. Nous évitons ces deux problèmes en utilisant une métrique barrière qui impose l’injectivité locale de la transformation et une formulation symétrique de la distance surface-à-surface.

4.1.3 Optimisation de maillages volumiques

L’optimisation de maillages volumiques joue un rôle important dans l’analyse par éléments finis car un mauvais maillage peut mener à des résultats erronés et à des instabilités. Dans cette section, nous nous concentrons sur les techniques relocalisant les sommets préservant la combinatoire du maillage.

Pour optimiser la forme des éléments, ces méthodes dépendent de métriques mesurant la distance entre

la forme de l'élément déformé et celle de l'élément idéal. Cette notion de distance est dépendante de la métrique utilisée. Nous référons le lecteur à Knupp [Knu00] pour une revue sur les différentes métriques utilisées par la communauté des éléments finis.

Nous soulignons deux des métriques les plus populaires, nommées le *condition number* [FK99] et le *mean ratio* [TRBS98]. Ce sont des métriques barrières, ce qui implique qu'un maillage valide restera valide tout au long de l'optimisation car elle nécessite une énergie infinie afin de rendre un élément dégénéré. Ces métriques optimisent la conformité de la transformation mais tendent à créer de grandes déformations et des résultats contre-intuitifs au voisinage d'une ligne de singularité, tel que montré à la figure 4.2.

Certaines techniques de correspondance de solides [MHTG05, BDS⁺12] n'utilisent que la différence de position des sommets voisins pour calculer la distance à la forme idéale. Une approche similaire utilise la discrétisation combinatoire de l'opérateur de Laplace, qui tente de relocaliser chaque sommet au centre de ses voisins immédiats. Ces techniques ont l'avantage d'être faciles à implémenter et efficaces en temps de calcul, mais n'empêchent pas l'inversion des éléments. Nous conjecturons que toute métrique ne possédant pas la propriété d'avoir une énergie infinie pour des éléments dégénérés ne garanti pas la validité du maillage résultant.

La métrique présentée dans ce chapitre est une métrique barrière inspirée de la mécanique des grandes déformations qui optimise la rigidité de la transformation et qui se comporte bien dans le voisinage des singularités.

4.2 Ajustement volumique

L'ajustement volumique vise à déformer un solide de telle sorte que sa frontière soit ajustée à la frontière du maillage cible tout en préservant le caractère lisse de la transformation. Pour y arriver, nous construisons une fonctionnelle d'énergie à partir de ces deux critères et nous l'optimisons à l'aide d'une méthode variationnelle par élément finis d'ordre élevé.

Étant donné un domaine de paramétrisation Ω , une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ différentiable par morceaux

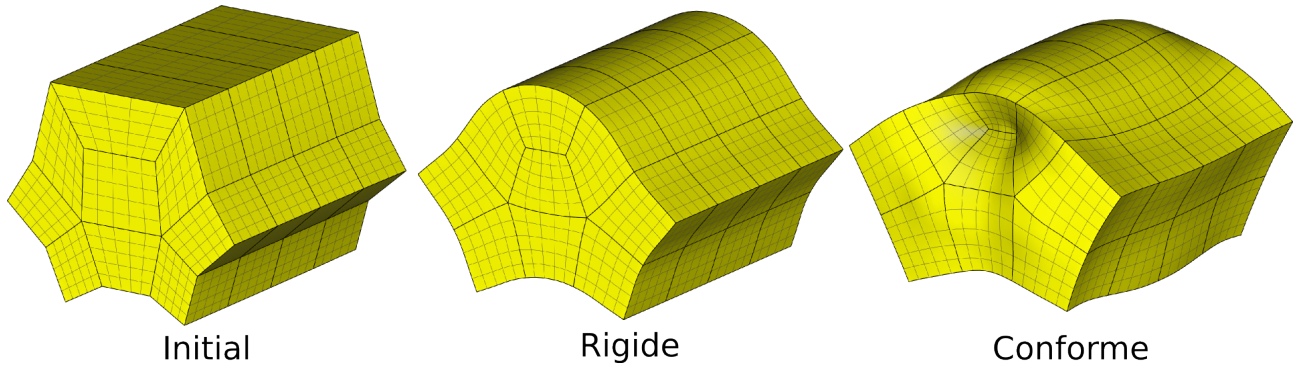


Figure 4.2 – Un plongement initial (gauche) est déformé sans contrainte avec une métrique optimisant la rigidité (centre) et la conformité (droite) en utilisant des éléments d'ordre élevé. La métrique conforme tend à contracter ou à dilater le volume au voisinage des singularités.

et une surface cible T , nous définissons la fonctionnelle d'énergie d'ajustement par

$$\mathcal{E}(f, T) = \mathcal{E}_S(f, T) + \lambda \mathcal{E}_\Omega(f) \quad (4.1)$$

où $S = f(\partial\Omega)$ est la surface du solide à être ajusté, \mathcal{E}_S est la fonctionnelle d'énergie surfacique (voir la section 4.2.3), \mathcal{E}_Ω est la fonctionnelle d'énergie volumique (voir la section 4.2.1) et λ est le facteur de régularisation.

Le domaine paramétrique n'est jamais réellement représenté, mais seulement utilisé comme référence pour la définition de f . Un plongement initial est toujours le point de départ de l'optimisation (voir la figure 4.3).

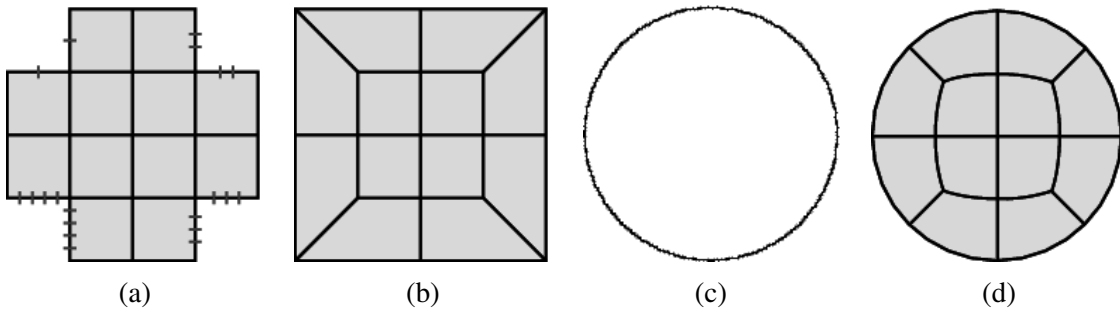


Figure 4.3 – Un exemple 2D d'un domaine paramétrique Ω (a), d'un plongement initial $f_0(\Omega)$ (b), d'une surface cible (c) et d'une transformation finale $f(\Omega)$ (d).

4.2.1 Fonctionnelle d'énergie volumique

L'objectif de la fonctionnelle d'énergie volumique est de préserver le caractère lisse et l'injectivité locale de f sans aucune connaissance de la surface cible. En d'autres mots, cette fonctionnelle mesure la distance à laquelle la matrice jacobienne \mathbf{J}_f se trouve de la transformation idéale à chaque point de Ω .

Soient $|\Omega|$ le volume de Ω et $\varepsilon(\mathbf{J}_f)$ la densité d'énergie potentielle mesurant la distorsion de la transformation. Nous définissons la fonctionnelle d'énergie volumique par

$$\mathcal{E}_\Omega(f) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \varepsilon(\mathbf{J}_f) d\Omega \quad (4.2)$$

où $\varepsilon(\mathbf{J}_f)$ est la densité d'énergie potentielle que nous définissons comme suit.

La densité d'énergie potentielle doit pénaliser les matrices jacobienes dégénérées tel qu'il soit impossible d'inverser des éléments lors de l'optimisation. En utilisant une analogie physique, ceci correspond à avoir besoin d'une quantité d'énergie infinie afin de compresser un objet tel que son volume soit nul. Nous prenons cette analogie au pied de la lettre en empruntant le concept de tension de *Hencky*, ou la *vraie* tension, utilisé en mécanique des grandes déformations [XC02]. La matrice de tension de Hencky, notée \mathbf{H} , est définie par

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{J}_f^T \mathbf{J}_f)$$

où le logarithme d'une matrice symétrique \mathbf{S} est calculée par sa diagonalisation $\ln(\mathbf{S}) = \ln(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\ln(\mathbf{D})\mathbf{Q}^T$ et où le logarithme d'une matrice diagonale est calculée composante par composante.

Étant donnée une mesure de la tension, nous pouvons déduire une densité d'énergie potentielle par

$$\varepsilon(\mathbf{J}_f) = \frac{1}{2} \|\mathbf{H}\|^2.$$

L'interprétation géométrique de cette mesure de la densité d'énergie potentielle peut être faite par les groupes de Lie des matrices symétriques définies positives (SDP) [Moa05]. Du point de vue des

groupes de Lie, la norme du logarithme d'une matrice SDP est la distance géodésique à la matrice identité. Dans notre contexte, la norme représente la distance géodésique à la transformation rigide la plus près.

Première variation de la fonctionnelle d'énergie

Un minimum local d'une fonctionnelle d'énergie est trouvé par sa première variation, qui est l'équivalent variationnel de la première dérivée en calcul différentiel. Cette première variation est calculée en additionnant une fonction test g à la manière d'une dérivée directionnelle [EPT⁺07]. Si la première variation est nulle dans toutes les directions, c.à.d. pour tout g , alors f est un minimum local de la fonctionnelle d'énergie. On la note $\delta_g \mathcal{E}_\Omega(f) = 0$ et la calcule par

$$\begin{aligned} \delta_g \mathcal{E}_\Omega(f) &= \frac{d}{d\tau} \mathcal{E}_\Omega(f + \tau g)|_{\tau=0} \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \frac{d}{d\tau} \varepsilon(\mathbf{J}_f + \tau \mathbf{J}_g)|_{\tau=0} d\Omega \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \left\langle \frac{d\varepsilon}{d\mathbf{J}_f}, \mathbf{J}_g \right\rangle d\Omega \end{aligned} \quad (4.3)$$

où nous utilisons la règle de dérivation en chaîne matricielle [PP12b] en notant $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T)$ et où le gradient de l'énergie potentielle est

$$\frac{d\varepsilon}{d\mathbf{J}_f} = \mathbf{J}_f^{-T} \mathbf{H}.$$

Nous démontrons cette identité comme ceci. Soient $\varepsilon = \frac{1}{2} \|\mathbf{H}\|^2$, $\mathbf{H} = \frac{1}{2} \ln(\mathbf{U})$ et $\mathbf{U} = \mathbf{J}^T \mathbf{J}$. En utilisant les propriétés de la trace [PP12b] et la symétrie de \mathbf{H} , nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial \varepsilon &= \text{tr}(\mathbf{H} \partial \mathbf{H}) = \text{tr} \left(\frac{1}{2} \mathbf{H} \mathbf{U}^{-1} \partial \mathbf{U} \right) = \text{tr}(\mathbf{H} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{J}^T \partial \mathbf{J}) \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{J}} &= (\mathbf{H}(\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T)^T = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Nous n'avons pas besoin de la seconde variation parce que nous utilisons une méthode d'optimisation quasi-Newton qui n'a besoin que des dérivées du premier ordre (voir la section 4.2.4). Les points de

selle et les maxima locaux sont évités en imposant les conditions de Wolfe [LN89, NW06].

4.2.2 Formulation par éléments finis

Nous formulons la solution à ce problème variationnel par une méthode d'éléments finis d'ordre élevé. Le domaine est décomposé en un ensemble de sommets V , d'arêtes E , de facettes F et de cellules C . La fonction f est définie par un ensemble de noeuds N qui sont les degrés de liberté de f . Pour les éléments linéaires, les noeuds sont situés aux sommets et représentent la valeur de f lorsqu'échantillonnée à chaque sommet. Pour les éléments d'ordre élevé, des noeuds sont ajoutés sur les arêtes, les facettes et à l'intérieur des cellules. Ces noeuds représentent des déplacements additionnels tels qu'illustrés à la figure 4.4.

Chaque type d'élément est décrit par une géométrie canonique servant à faciliter les calculs, une géométrie de référence qui représente la forme idéale de l'élément, une fonction d'interpolation qui étend les valeurs de la fonction définie par les noeuds à l'intérieur de l'élément canonique et une méthode de quadrature qui évalue précisément l'intégrale sur le domaine de l'élément.

Les géométries canoniques d'un hexaèdre, d'un prisme et d'un tétraèdre sont respectivement définies par $[0, 1]^3$, $\{(u, v, w) \in [0, 1]^3 \mid u + v \leq 1\}$ et $\{(u, v, w) \in [0, 1]^3 \mid u + v + w \leq 1\}$. La transformation

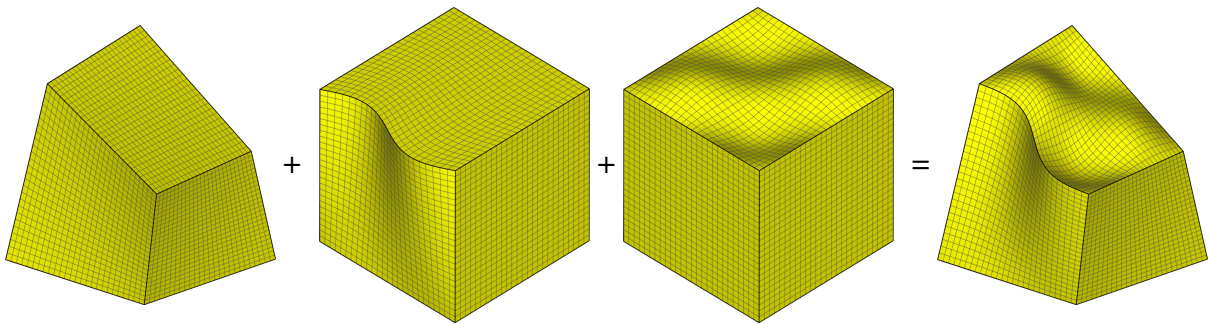


Figure 4.4 – Une transformation d'ordre élevé f d'un hexaèdre en utilisant une transformation linéaire définie par les noeuds aux sommets à laquelle nous ajoutons des déplacements additionnels définis par les noeuds aux arêtes et aux facettes.

d'un élément canonique vers son élément de référence est exprimée par une matrice \mathbf{A} définie par

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{hex} &= \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_{prism} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{A}_{tet} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Une fonction d'interpolation $h(\mathbf{u})$ est définie pour chaque élément dans son espace canonique en utilisant les valeurs des noeuds $\{\mathbf{n}_i\}$. Pour un hexaèdre d'ordre p , nous décomposons h en une interpolation linéaire en utilisant les noeuds aux sommets $\{\mathbf{v}_i\}$ et nous les augmentons des noeuds aux arêtes $\{\mathbf{e}_{ij}\}$, aux facettes $\{\mathbf{f}_{ijk}\}$ et aux cellules $\{\mathbf{c}_{ijk}\}$ par

$$\begin{aligned}h(\mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^{(p+1)^3} \mathbf{n}_i N_i(\mathbf{u}) \\ h(\mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^8 \mathbf{v}_i V_i(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{p-1} \mathbf{e}_{ij} E_{ij}(\mathbf{u}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \mathbf{f}_{ijk} F_{ijk}(\mathbf{u}) + \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \mathbf{c}_{ijk} C_{ijk}(\mathbf{u})\end{aligned}\tag{4.5}$$

où $\{\mathbf{n}_i\} = \{\mathbf{v}_i\} \cup \{\mathbf{e}_{ij}\} \cup \{\mathbf{f}_{ijk}\} \cup \{\mathbf{c}_{ijk}\}$ est la base linéaire usuelle et E_{ij} , F_{ijk} et C_{ijk} sont les noeuds d'ordre élevé. Les bases fonctionnelles des arêtes, des facettes et des cellules s'annulent aux frontières du sous-élément sur lequel ils sont définis. Par exemple, nous avons

$$\begin{aligned}E_{1j}(u, v, w) &= (1-u)(1-v)\phi_j(w) \\ F_{1jk}(u, v, w) &= (1-u)\phi_j(v)\phi_k(w) \\ C_{ijk}(u, v, w) &= \phi_i(u)\phi_j(v)\phi_k(w)\end{aligned}$$

où $\{\phi_i\}$ est une base fonctionnelle hiérarchique. Ici, nous choisissons i comme indice représentant $\{\phi_*\}$. Dans ce chapitre, nous utilisons les séries de Fourier modifiées [IN08] au lieu des séries de Fourier classiques car elles contournent le phénomène de Gibbs aux extrema et possèdent de meilleures propriétés de convergence pour les fonctions non périodiques, tel que démontré par Iserles et Nørsett [IN08]. Sur l'intervalle $[0, 1]$, la base est définie par $\{1, \sqrt{2}\cos(i\pi x)\}$ pour $i \geq 1$. Nous intégrons cette base fonctionnelle afin d'obtenir une fonction linéaire augmentée de fonctions d'ordre élevé s'annulant aux extrémités $x = 0$ and $x = 1$. Nous obtenons

$$\phi_i(x) = \frac{\sqrt{2}\sin(i\pi x)}{i\pi}.$$

Nous aurions aussi pu utiliser les polynômes intégrés de Legendre qui sont souvent utilisés par la communauté des éléments finis [SB11]. Nous avons toutefois trouvé que la non-uniformité des oscillations des polynômes pouvait être observée dans la géométrie finale (voir la figure 4.5).

Notez que les noeuds sont partagés entre éléments adjacents. Pour cette raison, il faut définir soigneusement (c.à.d. de façon cohérente) l'orientation de chaque sous-élément de telle sorte que les fonctions d'interpolation soient conformes d'un élément à l'autre.

Soit \mathbf{x} un point dans l'élément de référence. Nous définissons la déformation volumique f comme une fonction de la matrice de l'élément de référence \mathbf{A} (voir l'équation (4.4)) et des fonctions d'interpolation nodales h (voir l'équation (4.5)) par

$$f(\mathbf{x}) = h(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x})$$

et sa matrice jacobienne \mathbf{J}_f est donnée par

$$\mathbf{J}_f = \mathbf{J}_h \mathbf{A}^{-T}.$$

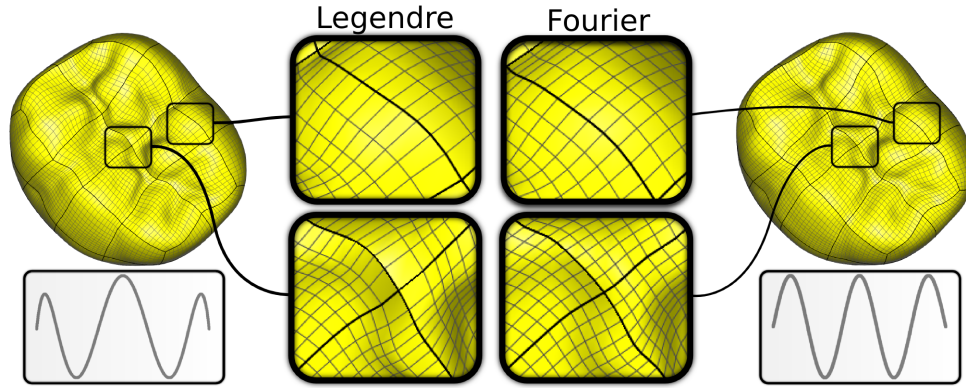


Figure 4.5 – Les effets de la non-uniformité des polynômes intégrés de Legendre en comparaison avec les polynômes intégrés de Fourier pour le modèle de la dent en utilisant des éléments d’ordre 6, avec le graphe de leur polynôme de degré 6 respectif. Notez les irrégularités du maillage près des arêtes (haut) et des sommets (bas) dans le cas des polynômes intégrés de Legendre (gauche).

Approximation de l’intégrale d’énergie volumique

La formulation par éléments finis permet d’évaluer l’intégrale d’énergie élément par élément. Nous approchons l’intégrale sur un élément par une méthode de quadrature qui échantillonne le domaine d’intégration étant donné un ensemble de paires position/poids $\{\mathbf{p}_i, w_i\}$. Chaque type d’élément de chaque ordre a sa propre méthode de quadrature. Sur un domaine D , une intégrale est approchée par

$$\int_D f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_i f(\mathbf{p}_i) w_i. \quad (4.6)$$

Choisir une méthode de quadrature dépend aussi de la base fonctionnelle utilisée. Pour des polynômes trigonométriques, la règle du trapèze est un choix simple qui peut être facilement calculée pour chaque type d’élément. Nous utilisons $2p - 1$ échantillons par dimension pour un élément d’ordre p et 2 échantillons par dimension pour les éléments linéaires. À la figure 4.5 (gauche), où les polynômes de Legendre intégrés ont été utilisés, une méthode de quadrature Gauss-Lobatto [SB11] est un choix plus approprié.

Nous avons maintenant tous les ingrédients qu’il nous faut pour discrétiser l’équation (4.3). Pour un

élément $t \in C$, nous avons que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\Omega,t} &= \int_t \varepsilon(\mathbf{J}_f) d\mathbf{x} \\ &\approx \sum_i \varepsilon(\mathbf{J}_h|_{\mathbf{p}_i} \mathbf{A}^{-T}) w_i |\mathbf{A}| \end{aligned} \quad (4.7)$$

où les paires position/poids $\{\mathbf{p}_i, w_i\}$ sont relatives aux éléments canoniques.

À l'intérieur d'un élément $t \in C$, la première variation est calculée en dérivant par la k -ième composante de chaque noeud f_j d'un élément t

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{\Omega,t}}{\partial f_{jk}} \approx \sum_i \left\langle \frac{d\varepsilon}{d\mathbf{J}_f}, \frac{\partial \mathbf{J}_h}{\partial f_{jk}} \mathbf{A}^{-T} \right\rangle w_i |\mathbf{A}|. \quad (4.8)$$

4.2.3 Fonctionnelle d'énergie surfacique

La fonctionnelle d'énergie surfacique mesure à quel point la frontière S du solide est loin de la surface cible T , sans se préoccuper si f est lisse. Nous mesurons habituellement cette distance en intégrant le carré de la distance normale depuis chaque point de S au point $\Pi_T(\mathbf{x})$ le plus près sur T par

$$F_{T \rightarrow S} = \int_S \|\mathbf{n}_T(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \Pi_T(\mathbf{x}))\|^2 d\mathbf{x}$$

où $\mathbf{n}_T(\mathbf{x})$ est la normale au point $\Pi_T(\mathbf{x})$.

Cette formulation a le désavantage de s'annuler dès que S est ajustée à un sous-ensemble de T . Pour corriger cette situation, nous utilisons une version symétrisée, telle que proposée par Nivoli et al. [NYL12]. Nous ajoutons aussi un facteur de normalisation pour rendre la fonctionnelle sans dimension

$$\mathcal{E}_S(f, T) = \frac{1}{AL^2} (F_{S \rightarrow T} + F_{T \rightarrow S}) \quad (4.9)$$

où A et V sont respectivement l'aire de T et le volume englobé par T et $L = V/A$ est une approximation de l'épaisseur moyenne de T .

La différence majeure entre les méthodes minimisant cette fonctionnelle est la façon dont elle est discrétisée. Pour $F_{T \rightarrow S}$, VSDM échantillonne S et partitionne T en utilisant le diagramme de Voronoï restreint [ES94] induit par l'échantillonnage. Pour chaque cellule restreinte, nous intégrons le carré de la distance à la surface depuis le point associé à la cellule. Ceci permet de s'assurer que la minimisation est effectuée sur toute la surface. La fonctionnelle $F_{S \rightarrow T}$ est discrétisée de la même manière, quoique la distribution des échantillons et le calcul du gradient diffèrent. Nous référons le lecteur à Nivolières et al. [NYL12] pour plus de détails sur l'implémentation.

Malgré qu'aucune distribution des échantillons ne soit prescrite par l'article original de VSDM, nous avons trouvé que les meilleurs résultats sont obtenus en posant un échantillon au centre de chaque facette de T et en utilisant l'échantillonnage de S induit par la restriction à la surface de la méthode de quadrature de l'équation (4.6).

4.2.4 Optimisation

La procédure d'ajustement se déroule comme suit. L'utilisateur donne une surface cible représentée par un maillage triangulaire et un plongement initial du domaine de paramétrisation représenté par un maillage en éléments finis mixtes contenant des hexaèdres, des prismes et des tétraèdres. Étant donné un facteur de régularisation, la fonctionnelle d'énergie totale de l'équation (4.2) est minimisée à l'aide d'une méthode quasi-Newton nommée L-BFGS, telle qu'implémentée par Liu et al. [LWL⁺09] en utilisant un préconditionneur M1QN3 et une mémoire de sept itérations. Le facteur de régularisation joue un rôle important dans le conditionnement du système. Nous utilisons $\lambda = 50$ pour un plongement initial loin de la géométrie cible et $\lambda = 0.05$ pour l'ajustement final. De plus petits pas peuvent être pris lorsque l'asbtraction n'est pas près de la surface cible, comme pour les modèles *King Kong* et *Hanger*. Pour un ajustement d'ordre supérieur, le solide est d'abord ajusté grossièrement en utilisant des éléments linéaires et ensuite amélioré en élevant graduellement l'ordre des éléments (voir l'algorithme 1).

À chaque itération de la procédure de minimisation, la fonctionnelle définie à l'équation (4.2) et son gradient doivent être évalués. L'intégration de la fonctionnelle surfacique est décrite par Nivolières et al. [NYL12]. La fonctionnelle volumique est calculée en utilisant les équations (4.7) et (4.8).

Algorithme 1 Ajustement incrémental

Entrée : 1) Une surface close T

2) Un maillage volumique initial M

Sortie : M ajusté à S

Ajuster T à M avec $\lambda = 50$ (voir l'algorithme 2)

// Phase d'ajustement éloigné

Tant que vrai **Faire**

// Phase d'ajustement rapproché

Incrémenter l'ordre des éléments de M

Ajuster T à M avec $\lambda = 0.05$ (voir l'algorithme 2)

L'optimisation est interrompue lorsque la norme du gradient est sous un seuil fixé. Nous utilisons un seuil de 10^{-8} dans notre implémentation. Pour des questions de stabilité, nous définissons l'énergie comme étant infinie et son gradient comme étant zéro lorsque $|\mathbf{J}_f| < 0$. Ceci crée une barrière qui empêche L-BFGS de créer des inversions. La procédure est illustrée par l'algorithme 2.

Algorithme 2 Procédure d'ajustement

Entrée : 1) Une surface fermée T

2) Un maillage volumique initial M

3) Un facteur de régularisation λ

Sortie : M ajusté à S

Pour chaque itération $x^{(k)}$ de L-BFGS **Faire**

// Calcul de $\mathcal{E} = \mathcal{E}_S + \lambda \mathcal{E}_\Omega$ et $\nabla \mathcal{E}$ (voir l'équation (4.1))

Calculer $\mathcal{E}_\Omega(f)(x^{(k)})$ et $\nabla \mathcal{E}_\Omega$ (voir les équations (4.7) et (4.8))

Calculer $\mathcal{E}_S(f, T)(x^{(k)})$ et $\nabla \mathcal{E}_S$ (voir l'équation (4.9), [NYL12])

Assembler \mathcal{E} et $\nabla \mathcal{E}$ et les retourner à L-BFGS

La méthode est implémentée en C++ dans le logiciel *Graphite* [Gra15] et tous les tests ont été effectués sur un ordinateur avec un processeur Intel® Core™ i7 930 et 12GB de mémoire sans aucune accélération par GPU. Nous avons pris avantage de l'architecture multi-coeurs du processeur en utilisant OpenMP. Le temps de calcul dépend de la complexité de la surface cible, du domaine de paramétrisation et de l'ordre des éléments. Voir le tableau 4.I pour plus de détails.

4.3 Résultats

Nous présentons maintenant les résultats d'applications de l'ajustement de solides en traitement de la géométrie.

Modèle	Ordre	$ C $	Temps de calcul	Jacobien normalisé
Pensatore	16	7	76.03	0.955
Sculpture	4	30	0.44	0.990
Bloc	4	50	0.39	0.980
Dent	8	68	11.21	0.976
Os	4	79	0.66	0.959
Double tore	4	113	1.23	0.967
<i>Hanger</i>	2	212	0.72	0.983
Main	4	230	1.26	0.957
Joint	2	302	0.52	0.993
<i>Mudface</i>	12	643	67.72	0.980
<i>King Kong</i>	12	2492	187.54	0.963

Tableau 4.I – Les résultats de quelques modèles illustrés dans les figures 4.6 et 4.7. Le tableau présente l’ordre des éléments, le nombre d’éléments, le temps de calcul de l’optimisation en minutes et les statistiques de la déformation par le jacobien normalisé.

4.3.1 Maillages mixtes

La création d’un maillage volumique à éléments mixtes englobé par une surface cible est une application naturelle de la procédure d’ajustement (voir les figures 4.6 et 4.7). Les maillages hexaédraux sont créés en restreignant l’abstraction à ne contenir que des hexaèdres. La convergence de l’énergie est expérimentalement montrées à la figure 4.8 pour deux modèles représentatifs.

La méthode VSDM préserve les arêtes franches grâce à la minimisation ne prenant en compte que de la distance normale. Ceci empêche l’utilisateur d’avoir à identifier explicitement les arêtes franches. Notre méthode permet aussi l’ajustement de maillages volumiques à des maillages surfaciques bruités, possédant des triangles déconnectés et dégénérés (voir la figure 4.10). Il est aussi possible d’ajuster un maillage à un nuage de points (voir la figure 4.10) en utilisant seulement l’ajustement inverse et en considérant le nuage de points comme un échantillonnage de la surface cible.

Malgré que l’injectivité locale de la transformation soit renforcée par notre métrique barrière, elle n’est pas garantie lorsqu’une base fonctionnelle d’ordre élevé et des méthodes de quadrature sont utilisées. Ceci est dû au fait que malgré que le jacobien soit positif aux échantillons de la méthode de quadrature, prouver que jacobien est positif partout est un problème ouvert. Johnen et al. [JRG13] ont montré qu’il

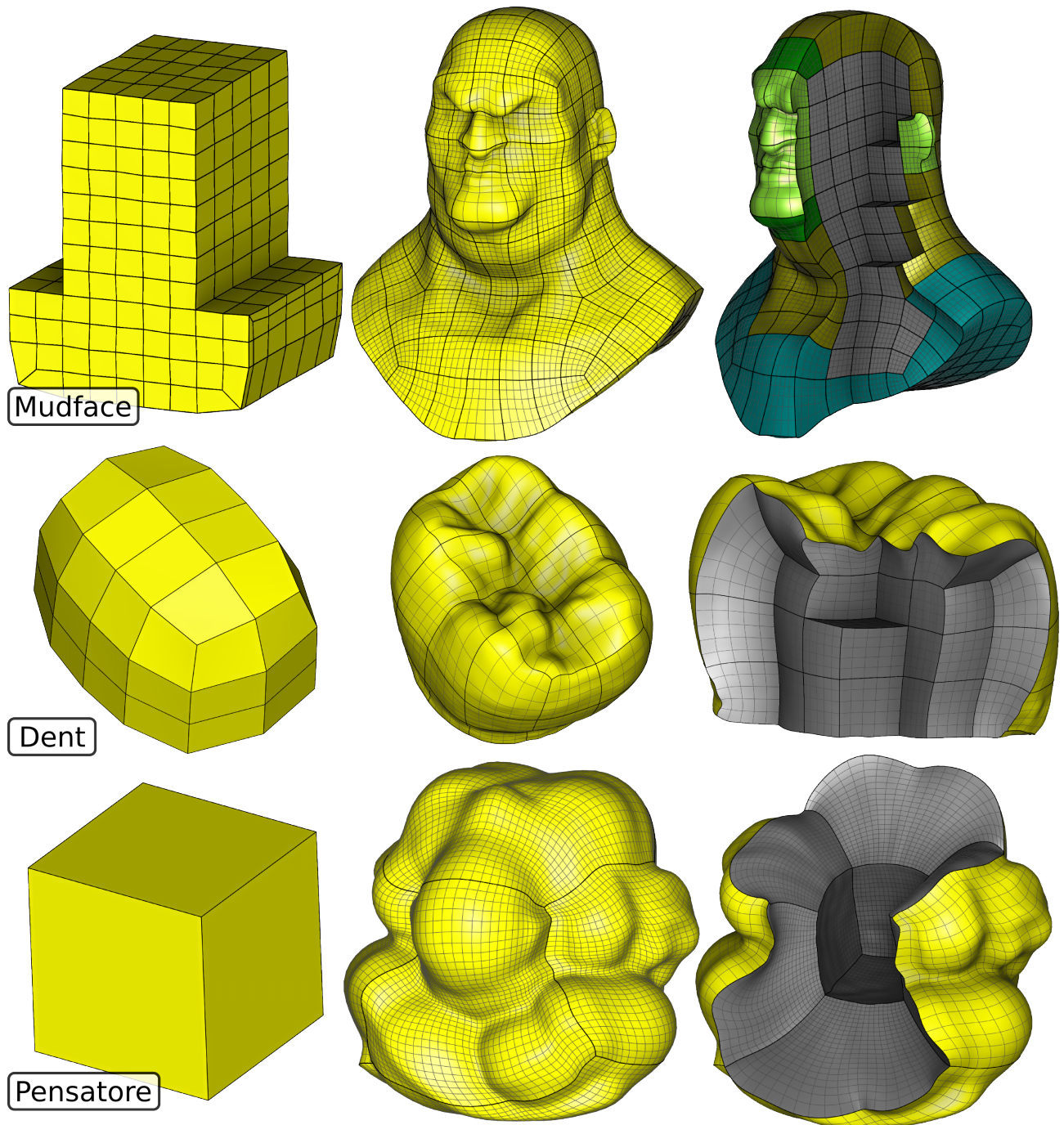


Figure 4.6 – Quelques maillages par éléments finis d’ordre élevé (centre) générés par notre méthode accompagnés de leur abstraction initiale (gauche) et d’une vue en coupe de chaque maillage (droite). Le modèle *Mudface* (haut) partage la même palette de couleurs que le modèle *King Kong* de la figure 4.1. Voir le tableau 4.I pour les statistiques associées.

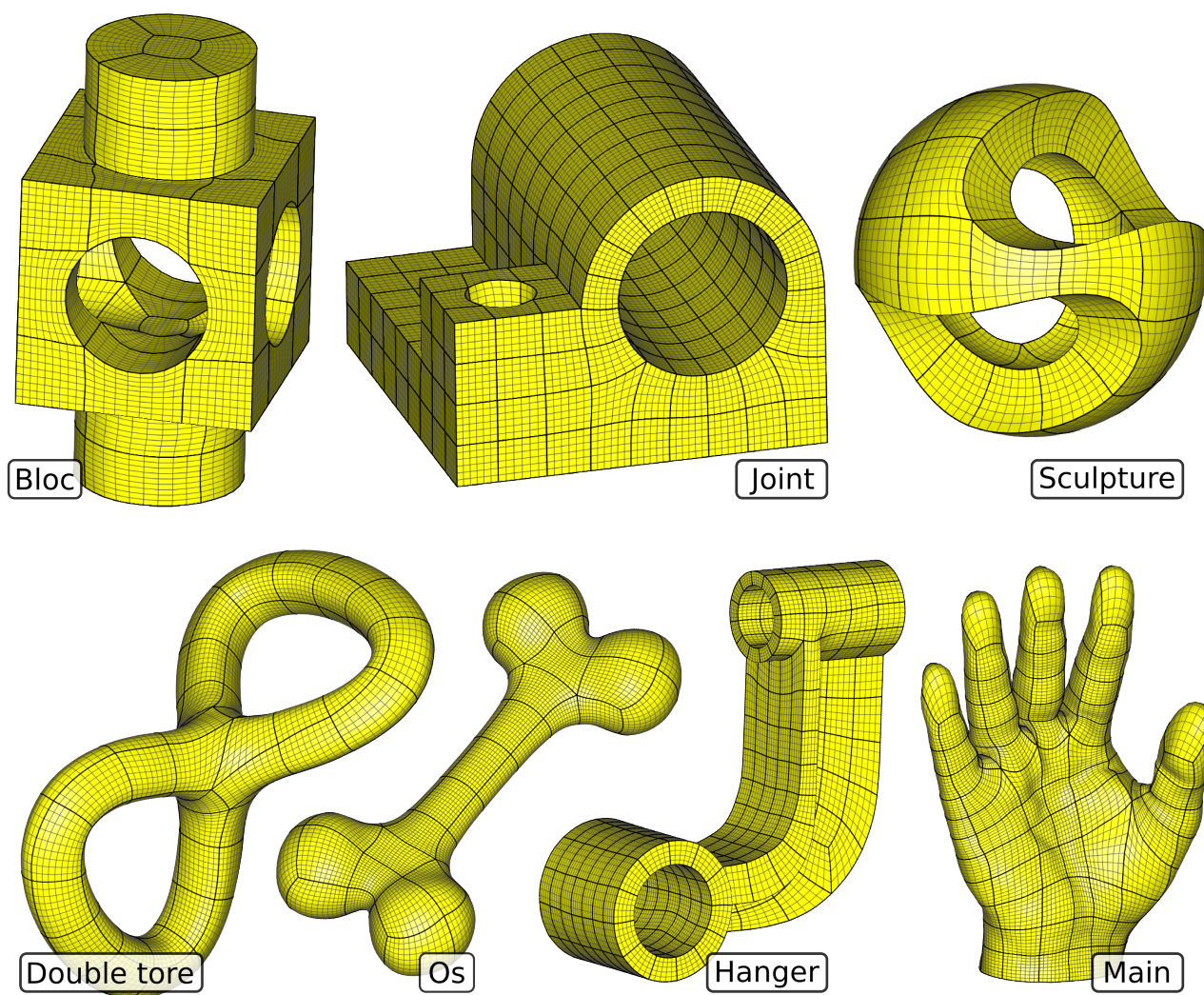


Figure 4.7 – Quelques résultats supplémentaires du tableau 4.I. La plupart des maillages ont bénéficié de la propriété de préservation des arêtes franches de la formulation anisotrope de la méthode VSDM.

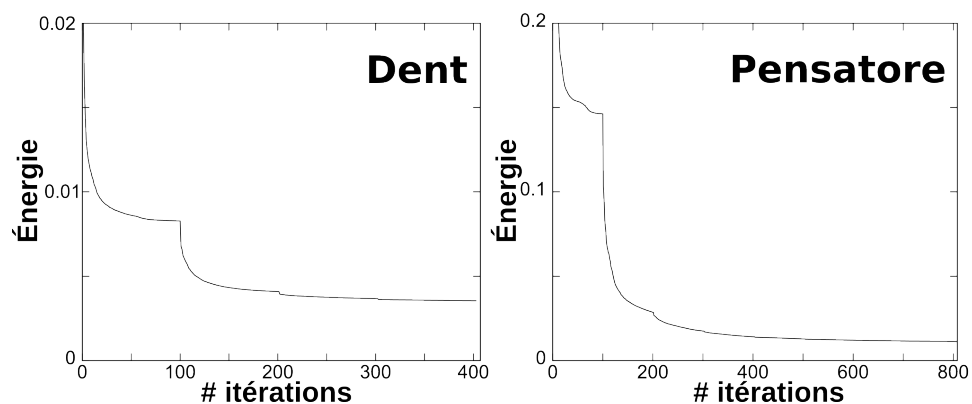


Figure 4.8 – L'évolution de l'énergie pour l'ajustement de deux modèles en phase d'ajustement rapproché. Les discontinuités du graphe sont dues aux raffinements successifs de l'ordre des éléments.

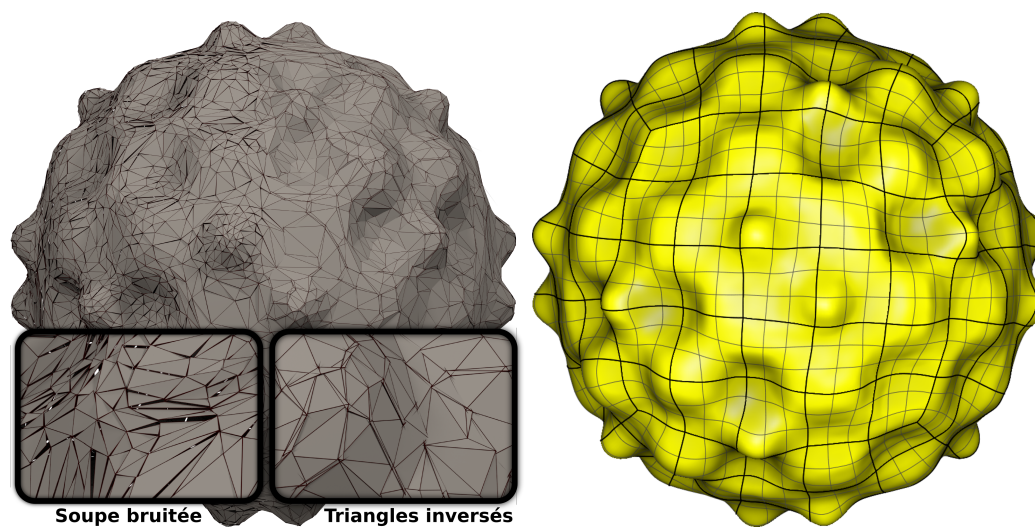


Figure 4.9 – Notre méthode supporte les maillages dégénérés provenant de données bruitées, de soupes de polygones et possédant des triangles inversés. Nous montrons la surface cible (gauche) et le maillage volumique ajusté (droite) utilisant des éléments d'ordre 8. Notez le caractère lisse des résultats malgré les dégénérescences asymétriques.

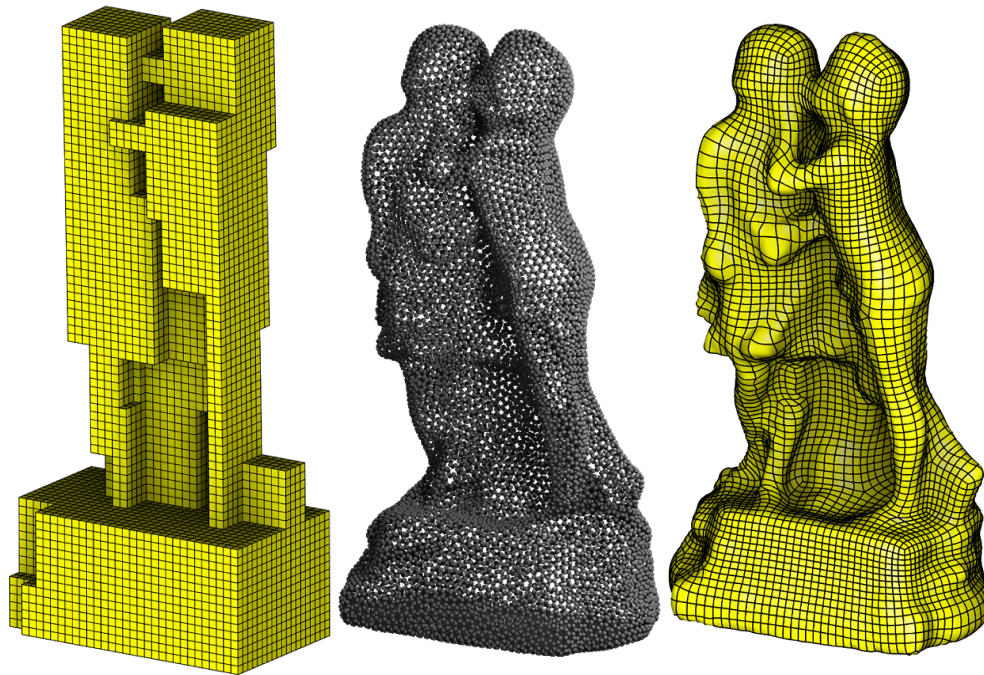


Figure 4.10 – L’abstraction (gauche), provenant de Gregson et al. [GSZ11], est ajusté à un nuage de points (centre) en utilisant des éléments d’ordre 2 (droite) en n’utilisant que l’ajustement inverse.

est possible de définir des bornes sur la valeur du jacobien pour des bases fonctionnelles polynomiales standard comme la base de Bézier, mais cette technique ne s’applique pas directement aux polynômes trigonométriques. Malgré tout, nous n’avons pas constaté d’éléments inversés, c.à.d. possédant un jacobien négatif ou nul, dans les résultats montrés aux figures 4.6 et 4.7 lors d’un échantillonnage dense et aléatoire de l’intérieur de chaque élément.

Les abstractions ont été créées manuellement par une combinaison d’opérations d’édition de maillage simples : la création de grilles uniformes, le rembourrage, l’effondrement d’arêtes, l’extrusion et le sculptage (voir la figure 4.11). Le rembourrage et l’effondrement d’arêtes sont surtout utiles pour pousser les singularités à l’intérieur du solide dans l’approximation d’objets courbes. L’extrusion peut aussi être effectuée à partir d’un maillage surfacique. Par exemple, l’abstraction du modèle de bloc (voir la figure 4.7) est obtenue par l’extrusion d’un maillage surfacique suivie par une étape de sculptage. Les techniques de création de polycubes automatisée auraient aussi pu être utilisées pour cette fin [LJFW08, WJH⁺08, HWFQ09, GSZ11].

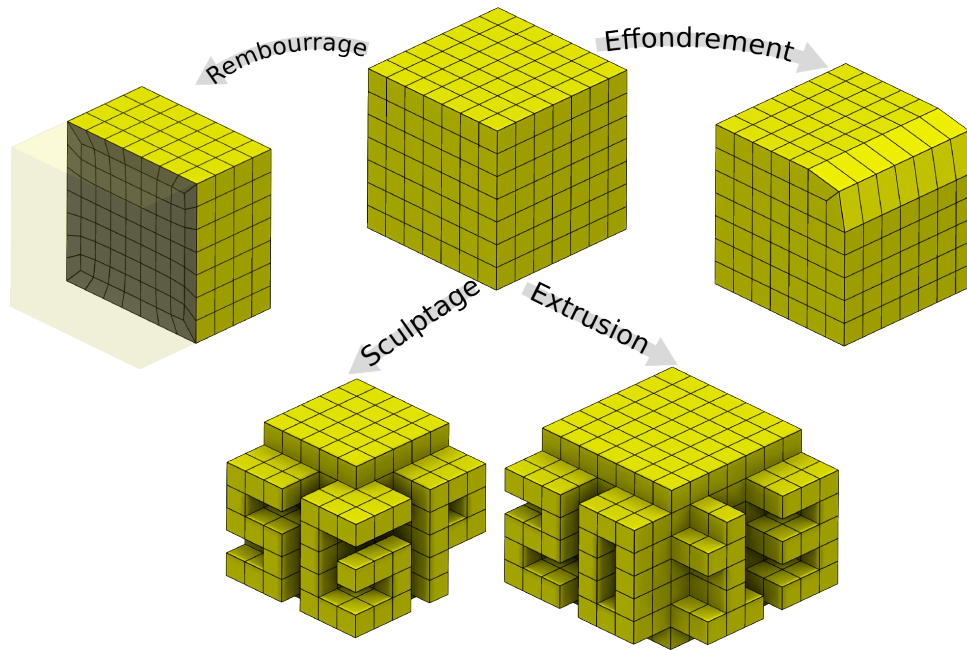


Figure 4.11 – La création d’abstraction à partir d’une grille uniforme par de simples opérations d’édition de maillage interactive.

4.3.2 Optimisation de maillages

La procédure d’ajustement peut aussi être utilisée pour optimiser les maillages volumiques existants (voir la figure 4.12). Il faut premièrement extraire la frontière du maillage volumique, puis effectuer la procédure d’ajustement du solide à sa propre frontière. Ceci permet à la fonctionnelle d’énergie volumique d’optimiser les éléments pendant que la fonctionnelle d’énergie surfacique préserve globalement la forme de la frontière.

Le maillage volumique donné en entrée peut être n’importe quel maillage valide et, jusqu’à un certain point, des maillages invalides. Notre expérience a montré que les éléments inversés peuvent être corrigés par la méthode de recherche itérative de L-BFGS lorsque des éléments sont près d’être valides (voir la figure 4.12).

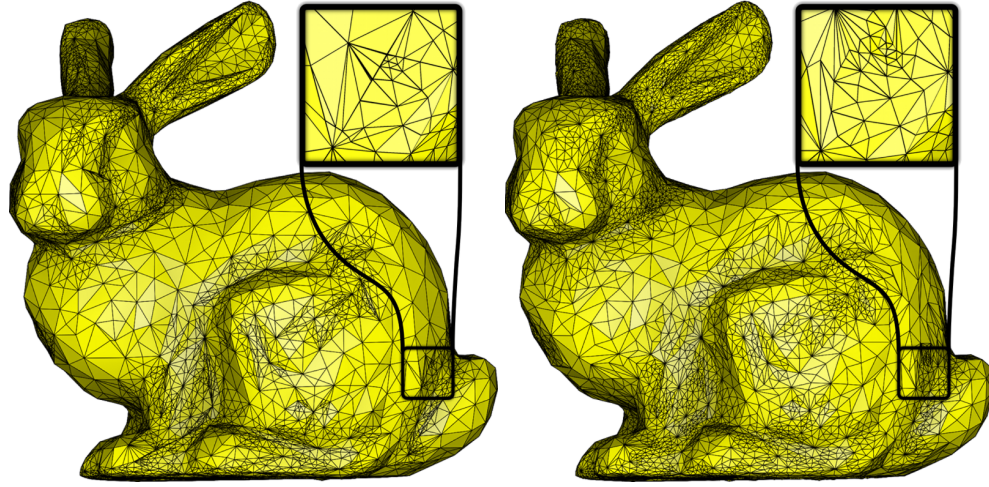


Figure 4.12 – Le maillage tétraédrique original du lapin (gauche) contient des éléments inversés et dégénérés. Après optimisation (droite), le maillage ne contient plus de dégénérescences.

4.3.3 Volumes de subdivision

L’ajustement de volumes de subdivision est aussi une extension naturelle de notre méthode. On note premièrement que les sommets V_c du maillage de contrôle sont reliés aux sommets V_s du maillage subdivisé par la matrice de subdivision \mathbf{S} de dimensions $|V_s| \times |V_c|$

$$V_s = \mathbf{S}V_c. \quad (4.10)$$

Le procédure d’optimisation s’effectue comme suit. Les sommets du maillage de contrôle sont donnés à L-BFGS en tant que degrés de liberté. À chaque iteration, nous retrouvons la position des sommets subdivisés par l’application de l’équation (4.10). Nous calculons ensuite la fonctionnelle d’énergie totale et son gradient \mathbf{G}_s en utilisant le maillage subdivisé. Nous retrouvons finalement le gradient \mathbf{G}_c du maillage de contrôle qui est redonné à L-BFGS par

$$\mathbf{G}_c = \mathbf{S}^T \mathbf{G}_s.$$

Dans notre implémentation, nous utilisons le schéma de subdivision par moyennage multi-linéaire [BSWX02]. Ce schéma préserve les arêtes franches durant la procédure de subdivision en modifiant la matrice \mathbf{S} en appliquant seulement le moyennage sur les sommets qui sont sur la sous-variété de l’arête franche.

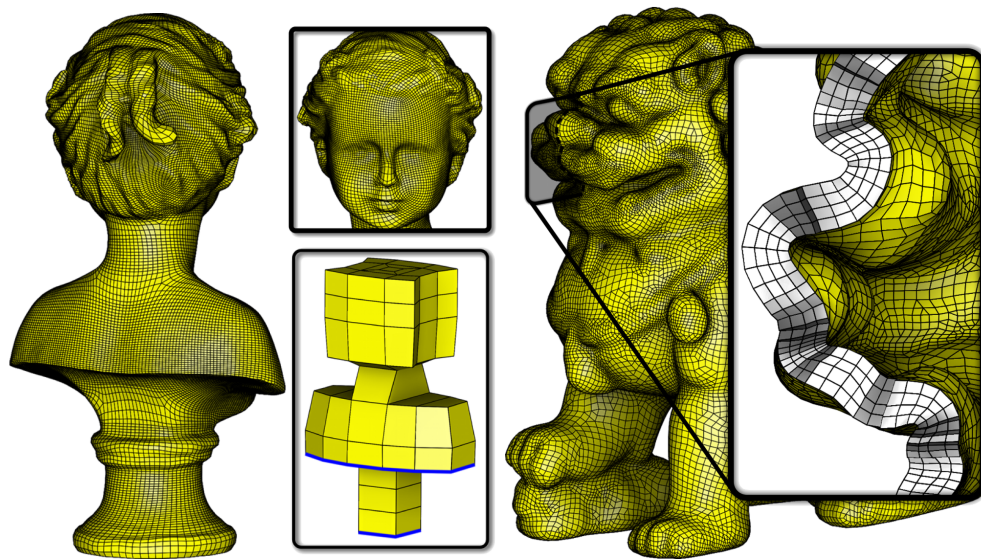


Figure 4.13 – Quelques extensions de notre technique pour l’ajustement de solides de subdivision (gauche) et pour la création de maillages de coques minces (droite). Notez que les oscillations apparentes des vues en coupe des maillages de coques minces (zone blanche) est un artéfact artificiel causé par un changement soudain des rangées de cellules affichées.

Pour cet exemple (voir la figure 4.13 (gauche)), nous avons débuté avec un maillage de contrôle ayant les arêtes franches marquées (en bleu) et nous avons appliqué l’optimisation du maillage de contrôle en utilisant la première subdivision comme maillage par éléments finis. Nous avons ensuite récursivement appliqué cette même procédure au maillage subdivisé résultant, jusqu’à ce qu’on obtienne la précision désirée (la 4-ième subdivision pour cet exemple).

4.3.4 Maillages de coques minces

Il est aussi possible d’utiliser l’optimisation de la fonctionnelle d’énergie volumique pour créer de maillages de coques minces.

Étant donné un nombre de couches l , nous créons premièrement une coque mince mince autour de la surface par une simple extrusion naïve le long de la normale de chaque point. Cette extrusion doit être assez mince pour éviter les auto-intersections. Après ceci, étant donnée une épaisseur d , nous optimisons la forme de chaque élément tel que son épaisseur soit égale à d/l et que sa forme tangentielle soit égale au polygone auquel l’élément est relié. Cette forme optimale est représentée par

la matrice de transformation \mathbf{A} vers la géométrie de référence.

La figure 4.13 (droite) montre un exemple d'un maillage d'une coque mince créé par extrusion d'une surface à la fois vers l'intérieur et l'extérieur, chaque extrusion résultant en deux couches d'éléments.

4.4 Discussion et conclusion

Nous avons présenté une méthode pour l'ajustement de maillages volumiques à une surface cible grâce à une formulation par éléments finis d'ordre élevé. Les arêtes franches et semi-franches sont implicitement préservées grâce au caractère anisotrope de la méthode VSDM. Notre métrique logarithmique impose l'injectivité locale de la transformation. Les séries de Fourier intégrées comme base fonctionnelle aux éléments d'ordre élevé hiérarchiques offrent de bonnes propriétés de convergence tout en maintenant l'uniformité du maillage.

Quelques limitations sont sujettes à des travaux futurs. Le comportement non linéaire des éléments d'ordre élevé rend difficile la garantie de l'injectivité. Quoique nous ayons une garantie pour un ensemble fini d'échantillons, la création d'éléments localement injectifs pour des bases fonctionnelles arbitraires reste un problème ouvert. Notre méthode est sujette aux mêmes échecs que ceux de la méthode VSDM surfacique (voir les travaux de Nivoliers et al. [NYL12]). Les parties du maillage cible étant trop rapprochées l'une de l'autre peuvent introduire des erreurs lors de l'ajustement de la surface lorsque l'échantillonnage n'est pas assez dense. Ces erreurs empêchent la création d'une transformation surfacique globalement bijective, qui peut à son tour empêcher une transformation volumique globalement bijective.

L'abstraction est actuellement prise telle quelle, sans remettre en question sa validité topologique et géométrique. Des abstractions très différentes de la géométrie de la surface cible peuvent induire de très grandes distorsions dans le maillage volumique final. Une abstraction topologiquement incompatible est aussi problématique car il devient alors impossible de trouver une transformation sans y inclure de discontinuités. Des travaux futurs pourraient aider à estomper ces restrictions en créant, enlevant et modifiant dynamiquement les éléments de l'abstraction.

Notre implémentation ne supporte pas les maillages contenant des éléments non conformes. Il serait intéressant de supporter les *T-meshes* [SZBN03] en utilisant une méthode d'éléments finis de Mortar [MMP89]. Il serait aussi intéressant de tester notre base fonctionnelle trigonométrique et notre métrique logarithmique dans un contexte d'animation assistée par ordinateur non physiquement réaliste.

Chapitre 5

Approche non linéaire par angles dièdres

Le travail contenu dans ce chapitre est principalement tiré de l'article *Dihedral Angle-based Maps of Tetrahedral Meshes* [PRP⁺15], présenté à la conférence internationale *SIGGRAPH* et paru dans la revue *ACM Transactions on Graphics*.

La représentation de la géométrie joue un rôle important sur la compréhension d'un problème et sa résolution. Un changement de variables judicieux peut simplifier l'expression d'une solution et mener à une implémentation simplifiée. De tels changements de variables ont grandement amélioré l'efficacité et la robustesse des paramétrisations surfaciques, telles que les méthodes à base d'angles [SdS01], de métriques [SSP08] et de courbures [CPS11, CPS13]. L'animation par ordinateur a aussi bénéficié de représentations alternatives, telles que les coordonnées barycentriques [JSW05] et l'analyse modale [PW89] pour réduire le temps de calcul. Vue ces expériences positives pour les surfaces, il est naturel de chercher des approches similaires pour les volumes. Malgré que certaines techniques de déformation utilisant les coordonnées barycentriques ou l'analyse modale se généralisent trivialement aux volumes, la quantité de travaux dans ce domaine reste limitée.

Dans ce chapitre, nous étudions les *angles dièdres*, une quantité géométrique bien connue de la communauté du traitement de la géométrie volumique. Un angle dièdre est défini par l'angle entre deux plans ; chaque arête d'un tétraèdre possède un angle dièdre déterminé par ses deux triangles incidents. Ces angles sont souvent utilisés pour évaluer la qualité d'un maillage tétraédrique [LS07]. Il paraît donc naturel d'utiliser une fonction objective définissant la qualité d'un maillage directement en terme d'angles et d'élaborer un mécanisme de résolution numérique les optimisant. Nous faisons un pas dans cette direction en montrant que la forme d'un maillage tétraédrique est complètement déterminée par ses angles dièdres, à une rotation et un changement d'échelle uniforme près. Essentiellement, ceci implique que manipuler ces angles change effectivement la géométrie du maillage. Notre but est d'étudier les propriétés et la structure de cette représentation afin d'approfondir nos connaissances sur les relations complexes entre les positions des sommets et les angles dièdres.

Notre première contribution est une preuve qu’un tel changement de variables est équivalent à une immersion dans \mathbb{R}^3 , où une immersion est une application simpliciale localement injective [Cer96], ce qui garantit qu’il n’y a ni tétraèdres inversés ni recouvrements multiples. Cette preuve mène à la construction d’un ensemble de variables et d’un ensemble de contraintes nécessaires à la représentation pour être une immersion. Notre seconde contribution est une procédure numérique optimisant des angles dièdres arbitraires afin de satisfaire aux contraintes. Nous appelons cette procédure *aplanissement* pour marquer la ressemblance avec les procédures d’aplanissement de surfaces. Notre troisième contribution est une technique de reconstruction spectrale robuste récupérant les positions des sommets à partir des angles dièdres.

Travaux reliés Notre travail s’interprète plus simplement comme l’équivalent volumique d’une série de méthodes de paramétrisation surfacique basées sur les angles, popularisées dans les dernières décennies [SdS01, SLMB05]. Le succès de ces méthodes nous a inspirés à rechercher une représentation équivalente pour les maillages tétraédriques, ce qui nous a conduits aux angles dièdres. Il est connu que les angles dièdres d’un seul tétraèdre déterminent sa forme [Luo97]. Notre but est de généraliser cette observation aux maillages tétraédriques et de construire un système complet permettant de travailler directement avec les angles dièdres. Malgré que cette généralisation ne soit pas triviale, nous montrons que la même démarche d’aplanissement et de reconstruction peut être utilisée de façon simple et intuitive.

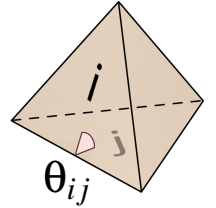
Aperçu Notre but est de prouver que les angles dièdres seuls déterminent la forme d’un maillage tétraédrique et de montrer comment retrouver les positions des sommets seulement à partir de ces angles. Nous débutons premièrement par montrer que les positions des sommets peuvent être récupérées uniquement à partir des angles dièdres, à une transformation de similitude près (section 5.1). Pour le prouver, nous démontrons l’équivalence pour des maillages tétraédriques très simples. Puis, nous décomposons un maillage quelconque en une séquence de maillages simples assemblés par des opérations élémentaires, prouvant la proposition par induction. Pour certaines applications, il se peut que les angles soient donnés en entrée et ne satisfassent pas aux contraintes. Pour ces applications, nous présentons un problème d’optimisation contraint cherchant l’ensemble d’angles le plus près satisfaisant

à toutes les contraintes. Nous résolvons ce problème par une méthode des moindres carrés non linéaire (section 5.2). Finalement, nous développons une méthode de reconstruction spectrale rapide pour récupérer les positions des sommets à partir des angles dièdres de façon robuste (section 5.3). Nous présentons quelques applications (section 5.4) exprimées en terme d’angles dièdres comme la paramétrisation volumique, l’interpolation de formes, l’optimisation de maillage, les formes induites par la combinatoire et la compression de maillage.

5.1 Variables d’angles dièdres

Nous prouvons maintenant que les angles dièdres déterminent complètement la forme d’un maillage tétraédrique et construisons l’ensemble des contraintes devant être satisfaites. Nous supposons que le maillage est une boule topologique. On peut penser à ce changement de représentation comme un changement de variables. La clé est de s’assurer que les nouvelles variables ont le même pouvoir de représentation que les variables de positions.

Les variables sont les angles dièdres de tous les tétraèdres. Chaque tétraèdre possède six angles dièdres $\theta_{ij} \in [0, \pi]$, c.à.d. un pour chaque paire de facettes (i, j) (voir la figure insérée). Pour simplifier l’expression des équations ultérieures, on dit que $\theta_{ij} = \theta_{ji}$ et que $\theta_{ii} = \pi$. Nous notons qu’une représentation en terme d’angles n’est pas consciente de la translation (3 degrés de liberté ou DOFs), de la rotation (3 DOFs) et de l’échelle globale (1 DOF) de la forme. Pour cette raison, nous ajoutons 7 variables de transformation à la représentation par souci de complétude. Pour les applications décrites dans ce chapitre, cette transformation est calculée après la reconstruction.



Nous nous appuyons sur des constructions géométriques simples afin de prouver l’équivalence. Pour chaque construction, nous utilisons des arguments géométriques simples pour découvrir les contraintes. Nous renforçons notre confiance en la propriété d’équivalence en comptant les DOFs de chaque construction, montrant que le nombre de variables d’une construction par sommet coïncide avec celui d’une construction par angles, c’est-à-dire le nombre de variables moins le nombre de contraintes d’égalité. Nous insistons que de compter les DOFs n’est qu’un test de cohérence et ne fait pas partie de

la preuve elle-même. Nous montrons premièrement que les angles d'un seul tétraèdre sont suffisants pour décrire sa forme, mais qu'ils ne sont pas indépendants. La même conclusion sera faite pour deux tétraèdres partageant un triangle et pour des tétraèdres entourant une arête. Pendant ce processus, nous montrons que trois types de contraintes *structurelles* et quelques inégalités sont nécessaires pour garantir l'équivalence des représentations. La conclusion est que les contraintes structurelles sont nécessaires et suffisantes pour garantir que le maillage puisse être construit dans \mathbb{R}^3 .

Contraintes de cellules La construction la plus simple est composée d'un seul tétraèdre. Luo [Luo97] donne les conditions nécessaires et suffisantes sur les angles dièdres pour pouvoir récupérer les positions des sommets. Nous présentons une preuve simple de ces conditions ici. Il est suffisant de démontrer que pour un ensemble d'angles dièdres satisfaisant quelques contraintes, il existe, à une rotation près, un ensemble de normales unitaires uniques générant trois dimensions et n'étant pas toutes dans le même demi-espace. De telles normales déterminent uniquement la position des sommets d'un tétraèdre, à une translation et une mise à l'échelle près, par l'intersection de plans.

Notre point de départ est l'identité $\sum_i \mathbf{n}_i a_i = \mathbf{0}$, où \mathbf{n}_i et a_i sont la normale unitaire et l'aire du i -ième triangle du tétraèdre t . Appliquer le produit scalaire avec chacune des quatre normales \mathbf{n}_j préserve l'identité et nous permet d'écrire $-\sum_i \cos(\theta_{ij}) a_i = 0$. Nous réécrivons ces quatre identités à l'aide de la matrice de Gram \mathbf{G}_t des normales des triangles, donnant

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\cos \theta_{01} & -\cos \theta_{02} & -\cos \theta_{03} \\ -\cos \theta_{01} & 1 & -\cos \theta_{12} & -\cos \theta_{13} \\ -\cos \theta_{02} & -\cos \theta_{12} & 1 & -\cos \theta_{23} \\ -\cos \theta_{03} & -\cos \theta_{13} & -\cos \theta_{23} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{G}_t} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ceci démontre que les angles dièdres sont déterminés par les normales. Nous montrons maintenant comment récupérer les normales à partir de \mathbf{G}_t de façon unique. Premièrement, nous notons que \mathbf{G}_t est la matrice de Gram de normales générant trois dimensions, et donc que \mathbf{G}_t est dégénérée. Ceci

implique que

$$|\mathbf{G}_t| = 0. \quad (5.1)$$

De plus, \mathbf{G}_t est construite avec des normales n'étant pas toutes dans le même demi-espace. En se rappelant que $\sum_i \mathbf{n}_i a_i = \mathbf{0}$ et que les a_i sont non nuls, cette condition est satisfaite si et seulement si les a_i sont de même signe, ce que nous assurons comme suit. Soit \mathbf{C}_t la matrice de cofacteurs de \mathbf{G}_t . Il peut être démontré que les composantes $(\mathbf{C}_t)_{ij}$ sont proportionnelles à $a_i a_j$ [Bar94]. Donc, on peut contraindre \mathbf{C}_t à être soit négative, soit positive. Cependant, \mathbf{G}_t est une matrice positive semi définie de rang 3, ce qui oblige les composantes diagonales de \mathbf{C}_t à être positives, donnant

$$\mathbf{C}_t > 0, \quad (5.2)$$

où l'inégalité est appliquée élément par élément. Nous n'avons pas besoin de contraindre davantage \mathbf{G}_t à être positive semi définie car les plus petites sous-matrices principales ont comme déterminant 1 et $\sin^2 \theta_{ij}$. La positivité de tous les déterminants des sous-matrices principales assure que \mathbf{G}_t est positive semi définie.

Nous exprimons chaque terme de l'équation (5.2) comme suit. Premièrement, la symétrie de \mathbf{C} élimine six inégalités. Soit (i, j, k, l) une permutation de $(0, 1, 2, 3)$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ et $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$. Les composantes hors diagonale de \mathbf{C} peuvent s'écrire par

$$\mathbf{C}_{ij} = c_{ij}s_{kl}^2 + c_{il}(c_{jl} + c_{jk}c_{kl}) + c_{ik}(c_{jk} + c_{jl}c_{kl}).$$

Les inégalités situées sur la diagonale se simplifient par l'observation suivante. Le mineur \mathbf{M}_{ii} de \mathbf{G} est la matrice de Gram d'un triangle formé des angles aux coins $(\theta_{jk}, \theta_{kl}, \theta_{lj})$ et ce triangle est sphérique si et seulement si \mathbf{M}_{ii} est définie positive [Luo97]. Cependant, l'inégalité $\mathbf{C}_{ii} = |\mathbf{M}_{ii}| > 0$ et le fait que tous les mineurs principaux de \mathbf{M}_{ii} ont un déterminant positif nous assurent que \mathbf{M}_{ii} est définie positive. Donc, nous remplaçons $\mathbf{C}_{ii} > 0$ par

$$\theta_{jk} + \theta_{kl} + \theta_{lj} > \pi.$$

Nous montrons maintenant que les contraintes (5.1) et (5.2) sont suffisantes pour récupérer les normales. Puisque \mathbf{G}_t est une matrice positive semi définie de rang 3, il existe une unique matrice $\mathbf{N}_{3 \times 4}$, à une rotation près, telle que $\mathbf{G}_t = \mathbf{N}^T \mathbf{N}$. Les colonnes de \mathbf{N} sont les normales désirées. La diagonale unitaire et le rang de \mathbf{G}_t assurent que les normales sont unitaires et qu'elles génèrent trois dimensions. La positivité du vecteur propre composé de l'aire de chaque triangle assure que les normales ne sont pas toutes dans le même demi-espace.

Pour tester la cohérence de cette conclusion, nous comptons maintenant les DOFs pour nous assurer qu'il y en ait autant que le nombre de variables de positions. En terme de positions des sommets, t a 12 DOFs (4 sommets \times 3 coordonnées). En terme d'angles, t a 6 variables d'angles dièdres et 7 variables pour la transformation globale, pour un total de 13 DOFs. En supposant que les contraintes (5.1) et (5.2) sont satisfaites, il reste 12 DOFs, ce qui appuie l'équivalence.

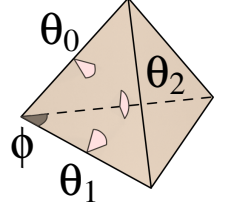
Chaque tétraèdre du maillage doit satisfaire à la contrainte d'égalité 5.1 et aux contraintes d'inégalité 5.2. Ces contraintes assurent la validité structurelle de chaque tétraèdre individuel. Par contre, les angles dièdres doivent satisfaire à davantage de contraintes pour assurer la validité d'un *assemblage* de tétraèdres, soient les contraintes de facettes et d'arêtes.

Contraintes de facettes La prochaine construction est l'assemblage de deux tétraèdres voisins t_0 et t_1 partageant un triangle. Nous supposons que les contraintes de cellules sont satisfaites pour les deux tétraèdres. À ce stade, chaque tétraèdre peut changer sa forme indépendamment de l'autre. Cependant, l'assemblage de t_0 et t_1 requiert que les deux triangles collés aient la même forme, pour lequel une condition nécessaire et suffisante est que les trois paires d'angles aux coins correspondants des triangles soient égaux. Puisque les contraintes de cellules sont satisfaites, on sait que les angles aux coins sont dans $[0, \pi]$. Donc, on peut simplement s'assurer que les cosinus des angles aux coins sont égaux. Notant ϕ_i^0 et ϕ_i^1 les i -ième angles aux coins des triangles collés de t_0 et t_1 , on a les trois contraintes

$$\cos \phi_i^0 = \cos \phi_i^1, \quad (5.3)$$

où seules deux des trois contraintes sont indépendantes dû à l'identité $\phi_0^i + \phi_1^i + \phi_2^i = \pi$. Le cosinus d'un angle au coin peut être calculé avec les angles dièdres incidents au sommet du coin. En suivant les notations de la figure insérée, on a que [DS08]

$$\cos \phi = \frac{\cos \theta_0 + \cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin \theta_1 \sin \theta_2}.$$



Nous comptons maintenant les DOFs pour nous assurer qu'il y en ait autant que le nombre de variables de positions. En terme de positions des sommets, cette construction a 15 DOFs (5 sommets \times 3 coordonnées). En terme d'angles, cette construction a 12 variables d'angles dièdres et 6 variables pour la transformation globale, pour un total de 19 DOFs. En supposant que les contraintes de cellules et de facettes sont satisfaites pour les deux tétraèdres, il reste 15 DOFs, ce qui appuie l'équivalence.

Chaque paire de tétraèdres crée trois contraintes (équation 5.3). Intruitivement, elles assurent que des *bandes* de tétraèdres collés par leurs facettes peuvent être reconstruites. Pour une boule topologique plus générale, nous avons besoin d'étudier une configuration correspondant à une *roue* de tétraèdres partageant une arête commune.

Contraintes d'arêtes La prochaine construction est l'assemblage de tétraèdres bouclant autour d'une arête. Nous supposons que les contraintes de cellules sont satisfaites pour tous les tétraèdres et que les contraintes de facettes sont satisfaites pour toutes les paires de tétraèdres voisins. Même si toutes ces contraintes sont satisfaites, il existe des configurations pour lesquelles la boucle ne ferme pas parfaitement. On peut comparer ce phénomène au défaut angulaire d'un sommet d'un maillage d'une surface courbe. Une condition nécessaire et suffisante pour que la boucle soit fermée est de contraindre l'ensemble des angles dièdres Θ_e autour d'une arête e par

$$\sum_{\theta \in \Theta_e} \theta = 2\pi, \quad (5.4)$$

ce qui assure que le recouvrement du sommet est simple, et donc, que la construction locale est injective.

Dans le cas 2D (e.g., ABF), rien ne contraint les arêtes fermantes à être isométriques, donc une contrainte supplémentaire est nécessaire pour fermer la roue. Dans notre cas, les facettes fermantes sont similaires grâce aux contraintes de facettes. De plus, ces facettes partagent une arête avec les autres tétraèdres. La longueur de cette arête étant égale pour tous les tétraèdres, les facettes sont non seulement similaires, elles sont isométriques. Une contrainte supplémentaire n'est donc pas nécessaire.

Nous comptons maintenant les DOFs pour nous assurer qu'il y en ait autant que le nombre de variables de positions. Nous considérons premièrement le cas simple d'une boucle de 3 tétraèdres. En terme de positions des sommets, cette construction a 15 DOFs ($5 \text{ sommets} \times 3 \text{ coordonnées}$). En terme d'angles, cette construction a 18 variables d'angles dièdres et 7 variables pour la transformation globale, pour un total de 25 DOFs. En supposant que les contraintes de cellules, de facettes et d'arêtes sont satisfaites pour les 3 tétraèdres, il reste 15 DOFs, ce qui confirme l'équivalence. Pour des boucles plus générales, nous procédons récursivement. Ajouter un tétraèdre dans la boucle ajoute un sommet. En terme de positions des sommets, ceci ajoute 3 DOFs. En terme d'angles, ceci ajoute 6 variables d'angles dièdres et 3 contraintes, pour un total de 3 DOFs. Donc aucune autre contrainte n'est nécessaire.

Chaque arête ajoute une contrainte (équation 5.4) à la représentation, nous permettant de construire des boules topologiques. Nous avons maintenant une représentation valide et complète d'un maillage volumique immergé dans \mathbb{R}^3 donnée par une transformation de similitude globale et un ensemble de variables d'angles dièdres telles que toutes les contraintes de cellules, de facettes et d'arêtes soient satisfaites.

Contraintes de sommets L'injectivité locale requiert que chaque sommet interne soit simplement recouvert, c'est-à-dire que leur angle solide soit égale à 2π . Cependant, la combinaison des contraintes d'arêtes assure déjà cette propriété [YJLG08], et donc, aucune contrainte de sommet n'est nécessaire.

Nous précisons aussi que compter les DOFs d'une construction locale ne contenant qu'un sommet interne demande une attention particulière. En effet, fermer le voisinage d'un sommet crée des contraintes redondantes. Ce phénomène est comparable aux contraintes de facettes où seulement deux des trois contraintes sont indépendantes. Nous insistons sur le fait qu'elles sont redondantes et non contradictoires, et n'invalident donc pas notre méthode.

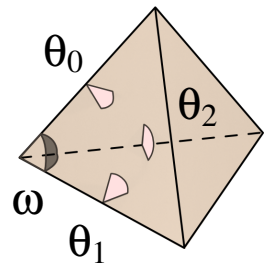
5.2 Aplanissement

Nous traitons maintenant le cas où les angles dièdres ne satisfont pas à toutes les contraintes. Cela peut se produire lorsque les contraintes géométriques ne sont pas satisfaites par les données (section 5.4.1) ou lorsque l'utilisateur donne un ensemble d'angles dièdres arbitraire (section 5.4.2). Ne pas satisfaire aux contraintes reflète l'impossibilité de récupérer les positions des sommets sans distordre les angles donnés en entrée. Nous contrôlons cette distorsion en résolvant le problème d'optimisation suivant,

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f(\Theta) \\
 \text{s.t.} \quad & |\mathbf{G}_t| = 0 \wedge \mathbf{C}_t > 0 \quad \forall t \in T \quad \text{Éq. (5.1,5.2)} \\
 & \cos \phi_c^0 = \cos \phi_c^1 \quad \forall c \in C \quad \text{Éq. (5.3)} \\
 & \sum_{\theta \in \Theta_e} \theta = 2\pi \quad \forall e \in E \quad \text{Éq. (5.4)} \\
 & \theta_b \leq \theta \leq \pi - \theta_b \quad \forall \theta \in \Theta,
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

où Θ est le vecteur de tous les angles dièdres, Θ_e est l'ensemble des angles dièdres incidents à une arête e , T est l'ensemble des tétraèdres, C est l'ensemble des coins, E est l'ensemble des arêtes, ϕ_c^0 et ϕ_c^1 sont les angles aux coins des triangles collés de t_0 et t_1 associés au coin c , θ_b est un paramètre positif permettant de borner les angles dièdres et $f(\Theta)$ est une fonction objective mesurant la distance entre les angles courants et les angles donnés en entrée.

Fonction objective Nous définissons f comme une fonction quadratique de Θ préservant la forme des tétraèdres telle que spécifiée par les angles dièdres originaux Θ^* . Nous utilisons une combinaison de deux ensembles de propriétés géométriques qui sont obtenues linéairement à partir des angles dièdres. Le premier ensemble de propriétés est composé des angles dièdres eux-mêmes. Le deuxième ensemble de propriétés est composé des angles solides à chaque sommet de chaque tétraèdre. Un angle solide est une fonction linéaire des angles dièdres incidents au sommets dans un tétraèdre.



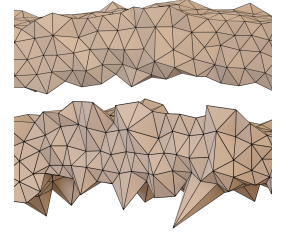
En suivant les notations de la figure insérée, on a

$$\omega = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 - \pi.$$

En notant Ω et Ω^* les vecteurs d'angles solides calculés depuis Θ et Θ^* , nous définissons f par

$$f(\Theta) = \|\Theta - \Theta^*\|^2 + \|\Omega - \Omega^*\|^2.$$

Le terme d'angles solides tend à pénaliser les tétraèdres allongés. La figure insérée montre une forme induite par la connectivité (section 5.4.3) aplanie avec (haut) et sans (bas) le deuxième terme. Nous avons maintenant une formulation complète du problème, que nous pouvons résoudre en pratique de la façon suivante.



Optimisation Pour résoudre le problème non linéaire (5.5), nous proposons une méthode des pénalités multi-phase. Chaque phase minimise une fonctionnelle d'énergie tentant d'équilibrer la satisfaction des contraintes et la minimisation de la fonction objective au sens des moindres carrés non linéaires. Après chaque phase, nous remettons les angles dièdres initiaux Θ^* à la solution courante pour laisser la prochaine phase satisfaire davantage les contraintes. Nous répétons cette procédure jusqu'à ce que les contraintes soient satisfaites à un seuil près. Une solution est habituellement atteinte après deux ou trois phases. Étant donnés les angles dièdres initiaux Θ^* , les contraintes d'égalité $\mathbf{c}(\Theta) = \{c_i(\Theta)\}$ et les contraintes d'inégalité $\mathbf{d}(\Theta) = \{d_j(\Theta)\}$, la fonctionnelle à minimiser est définie par

$$E(\Theta) = \alpha f(\Theta) + \|\mathbf{c}(\Theta)\|^2 + \|\min(\mathbf{d}(\Theta), 0)\|^2 \quad (5.6)$$

où les contraintes sont exprimées par $c_i(\Theta) = 0$ et $d_j(\Theta) > 0$ et où α est un facteur régularisateur. Nous utilisons $\alpha = 10^{-6}$ pour tous les exemples. L'ensemble des contraintes \mathbf{c} contient toutes les contraintes d'égalité, incluant celles qui sont interdépendantes, car nous avons observé une meilleure convergence.

Dans cette formulation, la fonction objective joue deux rôles. Premièrement, puisque toutes les

immersions d'un maillage satisfait aux contraintes, elle assure que nous ne divergeons pas trop loin des angles dièdres initiaux. Deuxièmement, puisque quelques contraintes sont redondantes, des erreurs numériques dues à la discrétisation peuvent rendre impossible la satisfaction exacte et simultanée de toutes les contraintes. Dans ce cas, la fonction objective régularise l'optimisation et oblige un compromis sans aboutir à une solution dégénérée. Le facteur de régularisation est choisi très petit pour que le solveur mette surtout l'emphasis sur la satisfaction des contraintes.

Nous minimisons E avec une méthode quasi-Newton nommée L-BFGS, telle qu'implémentée par Liu et al. [LWL⁺09] en utilisant un préconditionneur M1QN3 et une mémoire de huit itérations. Ce solveur requiert seulement les premières dérivées de chaque contrainte, que nous calculons comme suit. Soit (i, j, k, l) une permutation de $(0, 1, 2, 3)$, $\partial_{ij} = \partial/\partial\theta_{ij}$, $\partial_i = \partial/\partial\theta_i$, $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$ et $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$. En suivant les identités de « The Matrix Cookbook » [PP12b], on a que

$$\begin{aligned}\partial_i \cos \phi &= \begin{cases} \frac{-\sin \theta_0}{\sin \theta_1 \sin \theta_2}, & \text{si } i = 0 \\ -\cot \theta_{3-i} - \cos \phi \cot \theta_i, & \text{sinon} \end{cases} \\ \partial_{ij} |\mathbf{G}| &= 2s_{ij} \mathbf{C}_{ij}, \\ \partial_{ij} \mathbf{C}_{ij} &= -s_{ij} s_{kl}^2, \\ \partial_{il} \mathbf{C}_{ij} &= -s_{il} (c_{jl} + c_{jk} c_{kl}), \\ \partial_{kl} \mathbf{C}_{ij} &= -s_{kl} (c_{ik} c_{jl} + c_{il} c_{jk} - 2c_{ij} c_{kl}), \end{aligned}$$

où \mathbf{C} est la matrice des cofacteurs de \mathbf{G} .

Solution initiale Puisque le problème d'optimisation 5.5 est non linéaire et non convexe, la convergence à un minimum global n'est pas garantie pour des solutions initiales arbitraires en utilisant une méthode de minimisation locale. Nous prenons comme solution initiales les angles dièdres initiaux spécifiques à chaque application puisque nous avons observé une meilleure convergence. Tel que montré à la figure 5.1, initialiser la solution à des valeurs bruitées ou aléatoires ralentit la convergence et peut même mener à un minimum local. Par exemple, la solution initiale bruitée a débuté avec une erreur plus grande et a nécessité 5 fois plus d'itérations avant de converger.

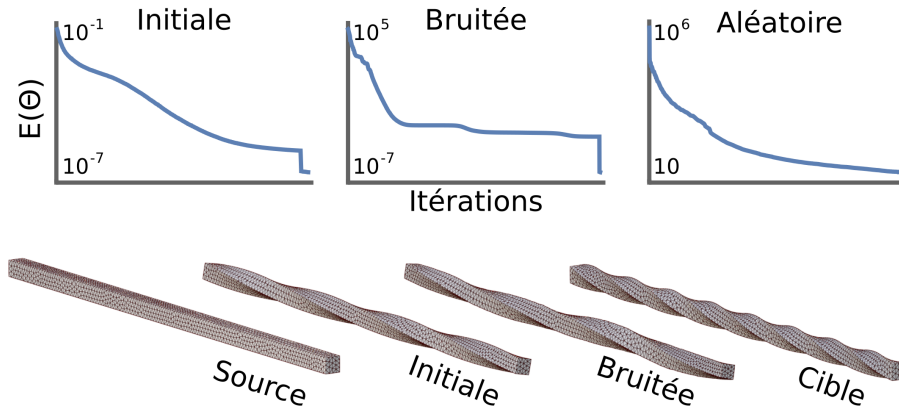


Figure 5.1 – Graphes de convergence, visualisés avec une échelle logarithmique, de l’interpolation d’une barre courbée pour différentes solutions initiales : angles interpolés initiaux (gauche), angles interpolés bruités (centre) et angles aléatoires (droite). L’expérience de la solution initiale aléatoire n’a convergée qu’à un minimum local et n’a pu être reconstruite. Les discontinuités dans graphes sont dues à un changement de phase de la méthode de minimisation.

5.3 Reconstruction

À ce stade, on a un ensemble d’angles dièdres satisfaisant à toutes les contraintes. Nous pouvons maintenant récupérer les positions des sommets. Nous pourrions procéder à une reconstruction gloutonne où le maillage est construit tétraèdre par tétraèdre. Cependant, cette méthode est sujette à l’accumulation d’erreurs numériques et est seulement viable pour de petits maillages (voir la figure 5.2). Plutôt, nous proposons une reconstruction spectrale linéaire plus robuste qui distribue uniformément l’erreur numérique sur tout le maillage. À cette fin, nous faisons une construction locale de chaque tétraèdre. Puis, nous extrayons des équations linéaires relatant les positions des sommets de paires de tétraèdres voisins en utilisant leurs coordonnées barycentriques. Nous utilisons ces équations pour construire un système d’équations linéaires impliquant le maillage en entier. Finalement, nous résolvons ce système linéaire par une décomposition en valeurs propres. Le résultat est un ensemble de positions de sommets représentant l’immersion.

Constructions locales La première étape est de construire indépendamment chaque tétraèdre à partir de ses angles dièdres. Quoique les angles soient théoriquement suffisants pour la reconstruction, nous avons observé qu’il était plus stable de récupérer premièrement les longueurs des arêtes, puis d’utiliser

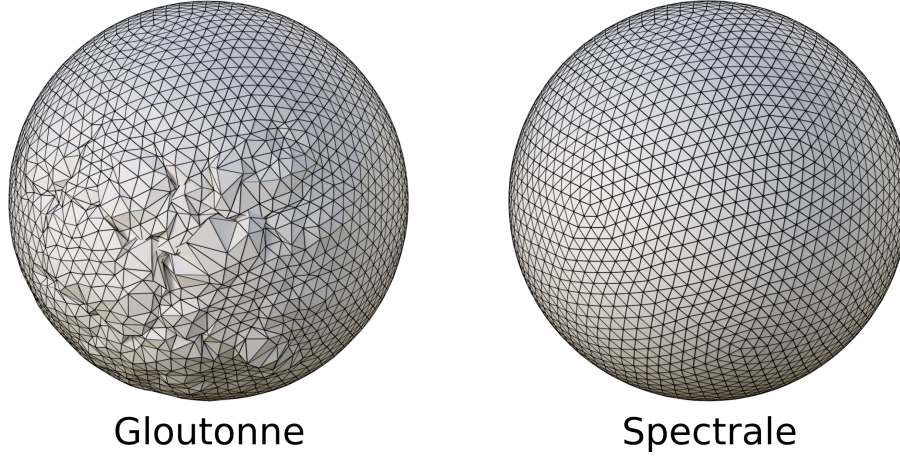
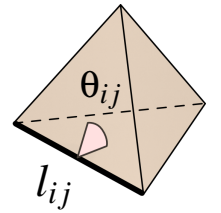


Figure 5.2 – Comparaison de la reconstruction gloutonne et spectrale du maillage d’une sphère dont les angles dièdres ont été perturbés. Notre méthode spectrale ajoute de la robustesse en distribuant uniformément l’erreur sur le maillage.

ces longueurs pour construire le tétraèdre. Cette stabilité a aussi été observée pour la reconstruction gloutonne de maillages triangulaires [SSP08]. À cette fin, nous utilisons l’identité suivante [Bar94]

$$l_{ij} = b_t \frac{\partial |\mathbf{G}_t|}{\partial \theta_{ij}},$$

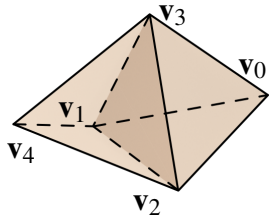
où b_t est un coefficient de proportionnalité et l_{ij} est la longueur de l’arête associée à θ_{ij} , telle que montrée par la figure insérée. Même si l’échelle n’est pas importante à cette étape, nous choisissons b_t tel qu’une arête arbitraire soit de longueur unitaire puisque cela tend à rendre les calculs ultérieurs plus robustes.



Étant donnée la longueur de chaque arête d’un tétraèdre t , on peut retrouver la position des sommets par *trilatération*. Nous calculons les positions par intersection de cercles et de sphères. Le processus est intuitif, mais le calcul peut être ardu. Nous réécrivons les équations ici pour faciliter l’implémentation. Puisque les longueurs n’encodent pas la translation et la rotation, nous positionnons un sommet arbitraire à l’origine, une arête sur l’axe X et un triangle dans le plan XY . En notant \mathbf{v}_i la position du sommet opposé au i -ième triangle de t , on a que

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_0 &= (0, 0, 0), & x_2 &= \frac{l_{23}^2 + l_{13}^2 - l_{03}^2}{2l_{23}}, \\
\mathbf{v}_1 &= (l_{23}, 0, 0), & y_2 &= \sqrt{l_{13}^2 - x_2^2}, \\
\mathbf{v}_2 &= (x_2, y_2, 0), & x_3 &= \frac{l_{23}^2 + l_{12}^2 - l_{02}^2}{2l_{23}}, \\
\mathbf{v}_3 &= (x_3, y_3, z_3), & y_3 &= \frac{l_{12}^2 - l_{01}^2 - 2x_2x_3 + y_2^2 + x_2^2}{2y_2}, \\
& & z_3 &= \sqrt{l_{12}^2 - x_3^2 - y_3^2}.
\end{aligned}$$

Relations linéaires Les constructions locales offrent une vue locale du maillage. Nous procédons maintenant à leur positionnement global. À cette fin, nous exprimons la position relative des sommets de tétraèdres voisins par leurs coordonnées barycentriques. Pour toutes les paires de tétraèdres (t_0, t_1) partageant un triangle, nous collons les deux constructions locales de t_0 et t_1 par leurs triangles associés en transformant la position des sommets de t_0 . Nous mettons à l'échelle t_0 pour que les deux triangles soient congrus. Il ne reste plus qu'à trouver la position du sommet v opposé au triangle associé f dans t_0 . Nous calculons les coordonnées locales de v en utilisant deux arêtes et la normale de f comme base. Nous calculons une base similaire en utilisant les éléments correspondants dans t_1 et nous l'utilisons pour obtenir la position transformée de v .



En suivant les notations de la figure insérée, pour deux tétraèdres collés et composés de cinq sommets ayant comme positions \mathbf{v}_i , où $(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ forment un tétraèdre, nous exprimons \mathbf{v}_4 par

$$\mathbf{v}_4 = a_0\mathbf{v}_0 + a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3, \quad (5.7)$$

où a_i sont les coordonnées barycentriques calculées par

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nous rassemblons les équations linéaires (5.7) de toutes les paires de tétraèdres pour former un système d'équations linéaires $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, où \mathbf{A} est une matrice composée des coordonnées barycentriques et \mathbf{x} sont les positions globales inconnues de tous les sommets. Nous réécrivons ce système surdéterminé en une formulation aux sens des moindres carrés $\mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ pour laquelle il nous faut trouver le noyau.

Solveur spectral Nous ne pouvons pas trouver \mathbf{x} directement car le noyau n'est pas vide. Ceci est dû au fait que les coordonnées barycentriques sont invariantes par transformation affine. Fixer quatre sommets enleverait cette invariance mais introduirait aussi des distorsions près des ancrages [MTAD08]. Nous utilisons plutôt une décomposition en vecteurs propres pour trouver le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre non nulle de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Ceci est calculé efficacement par la méthode de la puissance inverse, telle que décrite par l'algorithme 3, où nous utilisons $\mu = 10^{-8}$ et $\varepsilon = 10^{-12}$. Nous résolvons le système linéaire par une décomposition Cholesky, telle qu'implémentée par CHOLMOD [CDHR08]. Puisque la matrice est constante durant toutes les itérations, nous factorisons préalablement \mathbf{B} puis nous résolvons par substitution arrière.

Algorithme 3 Solveur spectral

Entrée : une matrice $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ et une solution initiale \mathbf{x}

Sortie : les positions des sommets \mathbf{x}

```

 $\mathbf{B} \leftarrow \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \mu \mathbf{I}$ 
 $\mathbf{x} \leftarrow \text{EnleverTransformationAffine}(\mathbf{x})$ 
Tant que  $\|\mathbf{Bx} - (\mathbf{x}^T \mathbf{Bx}) \mathbf{x}\|_\infty > \varepsilon$  Faire
    Résoudre  $\mathbf{By} = \mathbf{x}$ 
     $\mathbf{x} \leftarrow \text{EnleverTransformationAffine}(\mathbf{y})$ 

```

Afin d'éviter les solutions dégénérées, nous enlevons la transformation affine contenue dans \mathbf{x} à chaque itération comme suit. Premièrement, nous recentrons les sommets autour de l'origine. Puis, nous enlevons le cisaillement en comparant la solution courante aux constructions locales par la procédure suivante. Soit \mathbf{J}_t la matrice transformant le tétraèdre t , tel que défini par la solution courante, vers sa construction locale. Nous calculons le cisaillement moyen \mathbf{S} pour tous les tétraèdres en espace logarithmique [Moa05] par

$$\mathbf{S} = \exp \left(\frac{1}{2N} \sum_{t \in T} \ln \mathbf{J}_t^T \mathbf{J}_t \right),$$

où le logarithme d’une matrice symétrique \mathbf{M} est calculé en utilisant sa diagonalisation $\ln \mathbf{M} = \ln(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q}\ln(\mathbf{D})\mathbf{Q}^T$, et où le logarithme d’une matrice diagonale est calculé élément par élément seulement sur sa diagonale. Appliquer \mathbf{S} à tous les sommets enlève le cisaillement. Puis, nous enlevons la rotation en alignant une arête arbitraire sur l’axe X et un de ses triangles incidents dans le plan XY . Finalement, nous normalisons \mathbf{x} pour enlever la mise à l’échelle globale.

La solution \mathbf{x} est l’immersion en termes de positions des sommets dépourvue de mise à l’échelle, de translation et de rotation globales. Nous choisissons la transformation rigide finale selon les besoins de l’application.

5.4 Applications

Nous insistons sur le fait que cette recherche est motivée principalement par notre curiosité scientifique et par la question fondamentale de l’étude de la structure de l’espace des angles dièdres admissibles. Nous avons également étudié les applications potentielles de cette représentation et de notre procédure d’optimisation. Nous ne prétendons pas que nos expériences donnent de meilleurs résultats que l’état de l’art dans les domaines de la paramétrisation volumique, de l’interpolation de formes et de la compression de maillages en terme de temps de calcul. Par contre, nous pensons qu’en plus de l’apport théorique, les résultats de nos expériences semblent confirmer que notre approche a des applications potentielles. En particulier, nous montrons que l’optimisation de maillages utilisant notre formulation réussie à récupérer des maillages très emmêlés posant problème à la plupart des méthodes d’optimisation. De plus, nous montrons que l’interpolation de formes se comporte bien, même en présence de grandes rotations.

Nous avons implémenté ces méthodes en C++ en extension au logiciel *Graphite* [Gra15] et tous les tests ont été effectués avec un processeur Intel® Core™i7 930 et 12GB de mémoire sans aucune accélération par carte graphique. Nous avons pris avantage de l’architecture multi-coeurs du processeur en utilisant OpenMP. Des temps de calcul sont donnés dans le tableau 5.II.

Des positions vers les angles dièdres Certaines applications ont besoin des angles dièdres initiaux du maillage. Nous devons donc être en mesure de convertir les positions des sommets en angles dièdres. Bien que ce processus soit simple, il faut prendre certaines précautions pour le faire de façon robuste. La plupart des langages de programmation offrent une fonction à deux arguments pour calculer l'arc tangente qui est généralement plus robuste que la fonction arc cosinus. Pour cette raison, nous utilisons la formule suivante [She13]

$$\theta_{ij} = \tan^{-1} \left(-\frac{3Vl_{ij}}{2\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j} \right),$$

où θ_{ij} est l'angle dièdre du tétraèdre t de volume V , l_{ij} est la longueur de l'arête associée à θ_{ij} et \mathbf{n}_i est la normale du i -ième triangle de t pondérée par son aire.

Contraintes géométriques Jusqu'à présent, nous avons vu les contraintes *structurelles*, qui assurent que le maillage est bien formé. Pour certaines applications, on a besoin de contraindre davantage la forme de l'objet. Par exemple, créer des polycubes (section 5.4.1) requiert que des morceaux de la frontière soient planaires et que les morceaux soient orthogonaux entre eux. Pour l'optimisation de maillages (section 5.4.4), la frontière doit demeurer inchangée. Pour chacun de ces deux exemples, nous avons besoin de contraintes *géométriques* pour nous assurer que certaines propriétés géométriques soient satisfaites par les angles dièdres. Nous présentons deux façons de contraindre la forme d'un maillage M .

La première façon est de réinterpréter les contraintes d'arêtes (5.4) comme suit. Une immersion générale d'une géométrie volumique est décrite par son tenseur de courbure de Riemann. Une propriété intéressante est que la courbure de Riemann est complètement définie par sa courbure sectionnelle. Regge [Reg61] montre que la courbure sectionnelle d'un maillage tétraédrique est une mesure discrète définie par arête e comme étant $2\pi - \sum_{\theta \in \Theta_e} \theta$. Pour prescrire la courbure sectionnelle $\tilde{\theta}_e$ of e , nous réécrivons les contraintes d'arêtes (5.4) par l'équation plus générale

$$\sum_{\theta \in \Theta_e} \theta = \tilde{\theta}_e,$$

où nous sommions sur tous les angles dièdres incidents à l'arête e . Cette prescription de courbure permet de spécifier les propriétés de planarité et d'orthogonalité nécessaires à la création de polycubes. La deuxième façon est de prescrire les angles aux coins des triangles de la frontière de M . Pour ce faire, nous ajoutons les contraintes de facettes suivantes

$$\cos \phi_c = \cos \tilde{\phi}_c,$$

où ϕ_c est l'angle du coin c de M et $\tilde{\phi}_i$ est son angle désiré. Cette prescription des angles aux coins permet de contraindre la forme de la frontière, nécessaire à l'optimisation de maillage.

Notez que ces deux méthodes ne sont pas mutuellement exclusives. On peut utiliser une combinaison des deux lorsque nécessaire. On doit cependant faire attention de ne pas introduire de contraintes contradictoires. Si cela se produit, il pourrait ne pas exister de solution. Cependant, pour les applications présentées dans ce chapitre, le contexte rend évident que toutes les contraintes sont compatibles.

5.4.1 Paramétrisation volumique

Une représentation par angles dièdres est idéale pour la paramétrisation de solides dont les domaines sont simples et réguliers. Dans notre contexte, la géométrie du domaine est spécifiée par des contraintes géométriques. Nous présentons deux types de domaines. Nous considérons premièrement les polycubes, qui ont des frontières planaires, puis les domaines définis par des graphes de singularité ajoutant des singularités à l'intérieur du solide.

Pour la création de polycubes, l'entrée est un maillage triangulaire surfacique pour lequel une étiquette est associée à chaque triangle. Cette étiquette spécifie l'axe sur lequel la normale du triangle doit être alignée. À partir de cette surface, nous créons un maillage tétraédrique avec *TetGen* [Si07]. Nous calculons les angles dièdres initiaux pour tous les tétraèdres en utilisant les positions initiales des sommets. Puis, nous aplatissons le maillage (section 5.2) en utilisant les contraintes géométriques forçant les faces du polycube à être planaires et ses arêtes à avoir un angle correspondant au changement d'orientation des normales des deux faces incidentes. Finalement, nous récupérons les positions des sommets par la reconstruction spectrale (section 5.3). Des résultats sont montrés à la figure 5.4 (gauche

et centre).

Pour cette application particulière, il est possible d'arrêter l'optimisation avant qu'elle ait convergé et laisser la reconstruction absorber l'erreur résiduelle. Arrêter l'aplanissement peut produire un polycube courbé. Pour corriger cela, nous ajoutons les contraintes d'alignement suivantes au système d'équations 5.5 durant la reconstruction pour aligner chaque triangle f_{ijk} à son axe assigné \mathbf{n}

$$(\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_j) \cdot \mathbf{n} = 0$$

$$(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

En plus des contraintes géométriques aux frontières, l'utilisateur peut spécifier des contraintes d'arêtes internes ne sommant pas à 2π . De telles contraintes sont utiles pour la création de singularités internes lors de la création de maillages hexaédriques [LLX⁺12]. Nous définissons le *graphe de singularité* comme l'ensemble de telles arêtes ainsi que les arêtes de frontières dont la contrainte d'arête ne somme pas à π . Un exemple est montré à la figure 5.4 (droite), où le graphe a été construit à la main.

Cette représentation offre quelques avantages par rapport aux techniques utilisant les positions pour la paramétrisation volumique avec les graphes de singularité. Premièrement, puisque les angles dièdres sont indépendants de leur positionnement global, chaque tétraèdre peut être spatialement déconnecté de ses voisins. Ceci implique que les angles dièdres encodent naturellement les domaines non triviaux

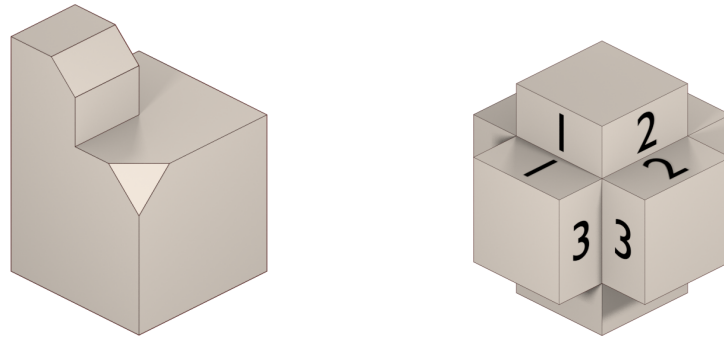


Figure 5.3 – La paramétrisation volumique avec les angles dièdres permet d'insérer des singularités à la frontière (gauche) ou à l'intérieur du domaine (droite). Des contraintes assurent que les facettes identifiées (droite) correspondent parfaitement, à une rotation de 90 degrés près.

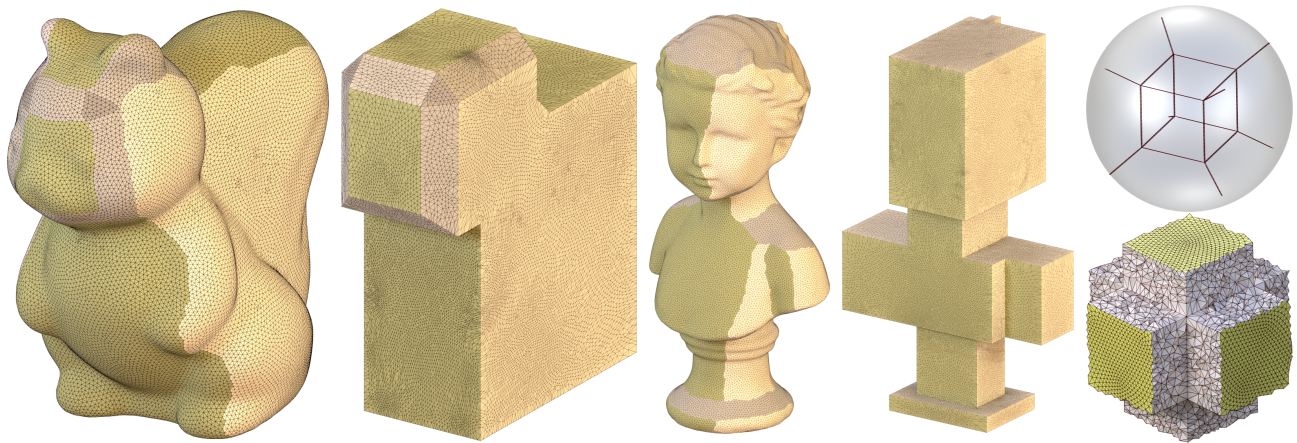


Figure 5.4 – Des exemples de paramétrisation volumique utilisant des contraintes de polycube (gauche et centre) et un graphe de singularité (droite), tels qu’illustrés à la figure 5.3. La frontière de chaque exemple est contrainte à être plane, mais les singularités sont soit à l’extérieur ou à l’intérieur du maillage.

sans avoir à changer la combinatoire du maillage. Deuxièmement, ceci montre que seul un graphe de singularité est nécessaire pour effectuer une paramétrisation. Notre travail ouvre donc la porte à de nouveaux algorithmes pouvant créer directement des graphes de singularité, au lieu qu’ils soient le produit de la création d’un champ vectoriel [LLX⁺12].

Notez que deux informations géométriques ne sont pas encodées par les graphes de singularité. Premièrement, la longueur de chaque arête du domaine ne fait pas partie de la formulation (figure 5.5a). Deuxièmement, un graphe de singularité non simplement connexe peut avoir des ambiguïtés d’orientation relative (figure 5.5b).

Remarques sur la combinatoire Étant donné un ensemble de contraintes géométriques, une immersion peut ne pas exister pour une combinatoire donnée d’un maillage. Par exemple, deux triangles de frontière appartenant à un même tétraèdre ne peuvent être coplanaires sans que le tétraèdre soit dégénéré. Pour la même raison, deux arêtes d’un même tétraèdre ne peuvent pas être colinéaires. Cette observation a été faite pour les polycubes [AL13] et pour les graphes de singularité [JHW⁺14]. Nous réécrivons ces deux contraintes ici par souci de complétude.

La première contrainte est qu’il doit y avoir un nombre suffisant de tétraèdres autour d’une arête e

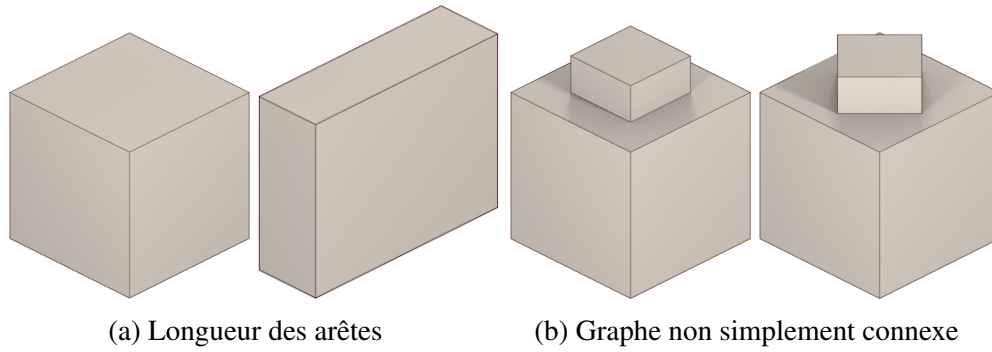
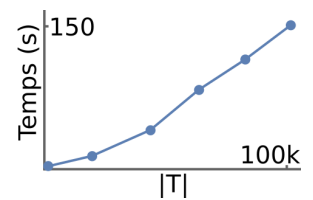


Figure 5.5 – Les ambiguïtés géométriques inhérentes aux graphes de singularité. Chaque exemple montre deux domaines partageant le même graphe de singularité.

pour une courbure prescrite $\tilde{\theta}_e$. Sachant qu'un seul tétraèdre peut supporter un angle dièdre allant jusqu'à π , on doit avoir que $\tilde{\theta}_e < |T_e|\pi$, où T_e est l'ensemble des tétraèdres incidents à e . Si une arête ne respecte pas cette condition, nous sélectionnons un tétraèdre arbitraire $t \in T_e$ et nous subdivisons l'arête opposée à e dans t . La deuxième contrainte est liée aux graphes de singularité. La contrainte est qu'un triangle f ne doit pas être incident à deux arêtes singulières. Dans cette éventualité, nous subdivisons la troisième arête de f . Ces corrections ne font qu'ajouter des tétraèdres autour des arêtes, et ne peuvent donc pas briser d'autres contraintes.

Notez que ces contraintes sur la combinatoire ne sont pas inhérentes à notre méthode, mais à toute méthode déformant des maillage tétraédriques.

Scalabilité Nous évaluons la scalabilité de notre méthode en fonction du nombre de tétraèdres en paramétrisant une sphère vers un cube à différentes résolutions. La figure insérée montre un graphe log-log indiquant que le temps de calcul croît linéairement par rapport au nombre de tétraèdres. Ce comportement a été observé pour la plupart des expériences. Cependant, la vitesse de convergence dépend également de la complexité des contraintes géométriques, expliquant la scalabilité d'apparence non linéaire des modèles de l'écureuil et du buste dans le tableau 5.II.



5.4.2 Interpolation de solides

L’interpolation de solides est la création d’une transition douce et naturelle entre deux formes différentes. Cette application est inspirée des travaux de Chen et al. [CWKBC13], qui proposent d’interpoler des formes planaires en utilisant la longueur au carré des arêtes. Le processus d’interpolation de la métrique, puis de récupérer les positions des sommets par une méthode de paramétrisation conforme robuste par métrique, crée une déformation douce de distorsion bornée. Malheureusement, les techniques actuelles de paramétrisation surfacique par métrique ne se généralisent pas trivialement aux volumes, empêchant son application directe à l’interpolation de maillages tétraédriques. Nous proposons d’interpoler les angles dièdres au lieu des longueurs au carré des arêtes, et d’utiliser les procédures d’aplanissement et de reconstruction pour récupérer l’immersion. Grâce à la propriété d’injectivité locale de notre représentation par angles, la distorsion induite par la déformation est aussi bornée.

L’algorithme procède comme suit. Pour deux poses d’un même maillage tétraédrique, nous calculons les angles dièdres de chaque pose en utilisant les positions des sommets. Étant donné un poids $w \in [0, 1]$, nous interpolons linéairement les angles dièdres correspondants (θ_j^0, θ_j^1) par $\theta_j^* = (1 - w)\theta_j^0 + w\theta_j^1$, où θ_j^i est le j -ième angle dièdre de la i -ième pose, puis nous aplanissons les angles résultants θ_j^* et nous récupérons la position des sommets pour obtenir la pose interpolée. Notez que nous pouvons aussi interpoler entre n poses en utilisant n poids $w_i \geq 0$, $\sum_i w_i = 1$. Finalement, nous appliquons la transformation de similitude globale finale en interpolant le centre de gravité et annulant la rotation globale et le changement de volume. Des résultats sont montrés à la figure 5.6.

Notre méthode partage beaucoup de similarités avec la méthode d’interpolation de second ordre de Kircher et Garland [KG08] qui exprime les changements des matrices jacobienues du maillage. Comme la nôtre, leur formulation ne dépend pas des coordonnées globales, et donc, nos résultats sont semblables. Cependant, notre méthode a l’avantage de garantir l’injectivité locale. Cette garantie vient par contre avec un temps de calcul plus élevé. Nous notons que notre méthode diffère des techniques utilisant des coordonnées globales, tel que ARAP [ACOL00], pouvant avoir des problèmes avec les grandes rotations et requérant des traitements spécialisés pour minimiser les repliements [LG15].

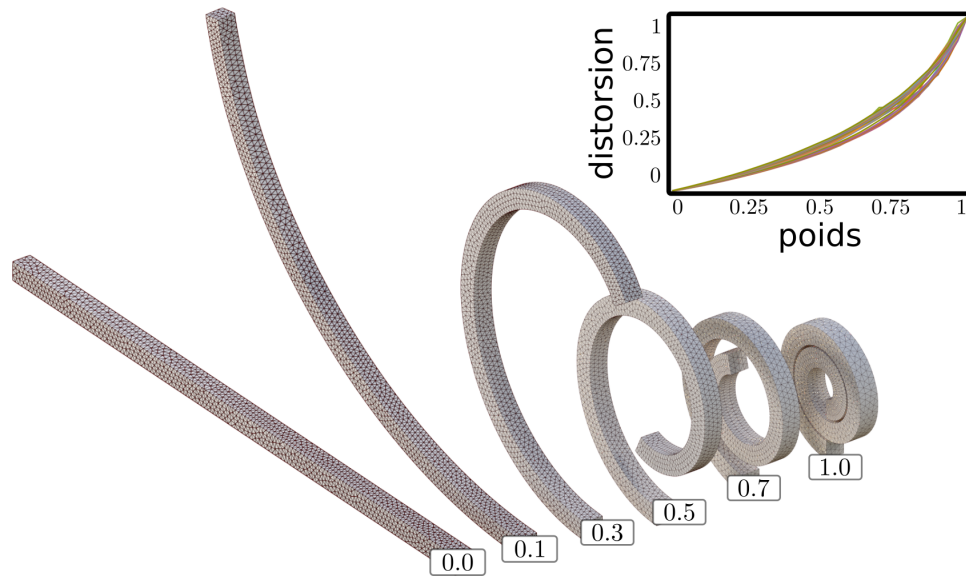


Figure 5.6 – Un exemple d’interpolation de solide d’une barre non déformée (gauche) vers une barre courbe (droite). Les formes intermédiaires sont calculées par une simple interpolation linéaire des angles dièdres avec différents poids. Nous montrons le conditionnement des matrices de transformation, nombre normalisé entre $[0, 1]$, de la barre droite vers la barre courbée pour les 100 tétraèdres les plus distordus.

5.4.3 Formes par la combinatoire

La récupération de la forme par la combinatoire, telle qu’introduite par Isenburg et al. [IGG01], montre qu’une grande quantité d’information est encodée dans la combinatoire d’un maillage. Pour le prouver, ils partent d’un maillage surfacique, détruisent la position de tous les sommets, puis réussissent à récupérer une approximation de forme originale par une procédure d’optimisation. Cette procédure consiste simplement à tenter de positionner les sommets pour que la longueur des arêtes soit approximativement uniforme.

Nous généralisons cette idée aux maillages volumiques. Au lieu d’utiliser l’uniformité de la longueur des arêtes comme critère de reconstruction, nous utilisons l’uniformité des angles dièdres. Nous commençons avec la combinatoire du maillage, nous donnons à chaque tétraèdre les angles dièdres d’un tétraèdre régulier, puis nous aplanissons ces angles sans aucune contrainte géométrique. Le résultat est une forme telle que chaque tétraèdre est le plus près possible d’un tétraèdre régulier, tout en préservant la cohérence avec ses voisins. Cette application démontre qu’une immersion initiale n’est

pas nécessaire pour l'application de cette méthode. Un résultat est montré à la figure 5.7.

Ce concept n'est pas une application en soi. Néanmoins, elle démontre le potentiel de notre représentation, c'est-à-dire que nous n'avons pas besoin d'une immersion initiale du maillage. Cette propriété devient utile lorsqu'utilisée à un but pratique, comme nous le montrons à la section suivante.

5.4.4 Optimisation de maillages

Nous appliquons maintenant cette méthode à l'optimisation de maillages. Nous nous concentrons sur l'optimisation de la forme de chaque tétraèdre sans modifier la combinatoire du maillage. Pour effectuer l'optimisation, nous utilisons la procédure d'aplanissement comme un moyen de partir d'angles dièdres de tétraèdres réguliers, c.à.d. $\cos^{-1}(1/3)$, pour les optimiser afin qu'ils forment un ensemble d'angles reconstructibles. Nous ajoutons des contraintes géométriques aux arêtes et aux facettes de la frontière pour préserver la forme originale de la frontière. Nous fixons les positions des sommets de frontière à leur position originale durant la reconstruction. Notez que contraindre la courbure et les angles aux coins des arêtes et des facettes de la frontière nous assure qu'il n'y ait plus de DOFs pour changer la forme de la frontière. Pour cette raison, cette application supporte les objets de genre plus grand que zéro.

Cette procédure ignore la géométrie originale des tétraèdres internes. Cela a l'avantage de pouvoir supporter les maillages emmêlés ayant des tétraèdres inversés et dégénérés. En donnant des angles dièdres idéaux, nous nous assurons que le résultat sera composé de tétraèdres les plus réguliers possibles. À la figure 5.8, nous montrons les maillages initiaux d'une sphère et du modèle *fertility* auxquels nous avons positionné aléatoirement les sommets internes, et qui contiennent donc plusieurs tétraèdres inversés. La procédure d'optimisation améliore la qualité des maillages initiaux et réussit à corriger tous les tétraèdres dégénérés.

Notre méthode ressemble beaucoup à celle d'Aigerman et al. [AL13], qui améliore la qualité de chaque tétraèdre en bornant la distorsion de la déformation de chaque tétraèdre. La différence clé est qu'ils mesurent la distorsion par le ratio des valeurs propres maximale et minimale de la matrice de transformation alors que nous mesurons la différence des angles dièdres. Tel qu'illustré dans



Figure 5.7 – La forme par la combinatoire est illustrée avec le modèle du pied. L’immersion originale (gauche) a été débarrassée de la position de tous ses sommets. En utilisant seulement la combinatoire, on peut les approcher (droite).

le tableau 5.I, notre méthode réussit à améliorer les angles extrémaux pour toutes les expériences effectuées en utilisant leurs modèles comme point de départ. Tel que noté par les auteurs, borner les angles dièdres ne borne pas le ratio d’aspect et peut créer des éléments allongés. Cependant, le terme d’angle solide contenu dans notre fonction objective tend à minimiser ce genre de distorsions.

5.4.5 Compression de maillage

Les angles dièdres peuvent être utilisés pour compresser la géométrie d’un maillage. L’idée est de quantifier les angles par une approximation plus grossière, par exemple, en utilisant seulement 2 bits par angle, puis de récupérer la position des sommets seulement à partir de cette information. On pourrait quantifier les angles par un échantillonnage uniforme de l’intervalle $[0, \pi]$. Par contre, un bon échantillonnage devrait prendre en compte le fait que les angles dièdres d’un maillage de qualité sont distribués autour de $\cos^{-1}(1/3)$. À cette fin, nous proposons de guider la quantification par l’histogramme des angles dièdres.

Premièrement, nous calculons les angles dièdres de la géométrie initiale en utilisant la position des sommets. Puis, étant donné un budget de n bits par angle, nous construisons l’histogramme en créant

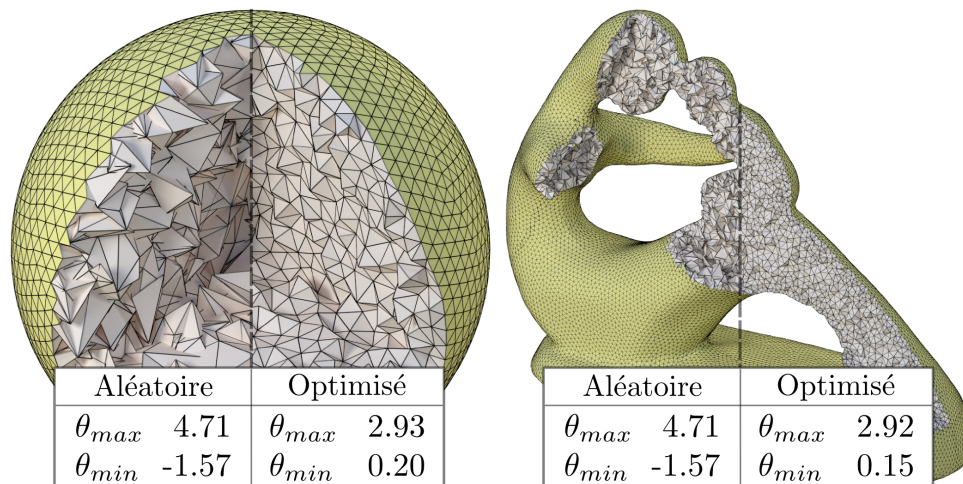


Figure 5.8 – Exemples d’optimisation de la position des sommets internes d’une sphère et du modèle *fertility*. Les sommets internes ont été déplacés aléatoirement (gauche) pour introduire des inversions. Après l’optimisation (droite), la géométrie de tous les tétraèdres a été récupérée sans aucune inversion, tel que démontré par les angles minimum et maximum.

Modèle	IBDM (min/max AD)	Nous (min/max AD)
Canard	16° / 148°	17° / 146°
Éléphant (v1)	16° / 148°	17° / 146°
Éléphant (v2)	18° / 147°	19° / 146°
Main	17° / 148°	18° / 146°
Cheval	16° / 148°	18° / 146°
Max Plank	21° / 148°	22° / 146°
Culbuteur	16° / 148°	18° / 146°
Crâne	14° / 153°	16° / 151°

Tableau 5.I – Résultats de l’optimisation d’un maillage en utilisant les modèles de l’article par Aigerman et al. [AL13] (IBDM). Nous montrons les angles dièdres (AD) minimum et maximum des maillages résultant en utilisant la méthode IBDM et la nôtre.

une seule classe contenant tous les angles dièdres et en la séparant récursivement à sa valeur moyenne jusqu'à ce que nous obtenions $2n$ classes. Notre échantillonnage est la valeur moyenne de chaque classe. Finalement, nous encodons chaque angles par l'index de l'échantillon le plus près. Nous avons aussi besoin de sauvegarder la table des valeurs moyennes pour la phase de décompression. Nous notons que l'espace mémoire utilisé par cette table est négligible pour des approximations grossières.

Pour récupérer la géométrie originale, nous initialisons les angles dièdres à la valeur moyenne correspondant à son index. Nous appliquons la procédure d'aplanissement, puis nous récupérons la position des sommets par reconstruction spectrale. Des résultats sont montrés dans les figures 5.9 et 5.10.

Pour tous les exemples, nous sommes en mesure d'atteindre 2 bits par angle avant de pouvoir apercevoir de la distorsion à l'oeil nu. Ce taux de compression élevé est dû à la redondance de l'information géométrique contenue dans les angles dièdres. En effet, il y a approximativement 8 fois plus de variables d'angles que de variables de positions. En d'autres mots, nous encodons un maillage avec en moyenne 48 bits par sommet. Nous ne rivalisons pas avec l'état de l'art, qui atteint des taux de d'environ 8 à 16 bits par sommet [MLDH15]. Cependant, exploiter ces redondances pour atteindre des taux de compression encore plus élevés est le sujet de travaux futurs. De plus, on pourrait décider de garder plus d'information géométrique aux frontières et moins à l'intérieur. Puisqu'il y a généralement moins de variables internes qu'externes, cette stratégie pourrait améliorer les taux de compression.

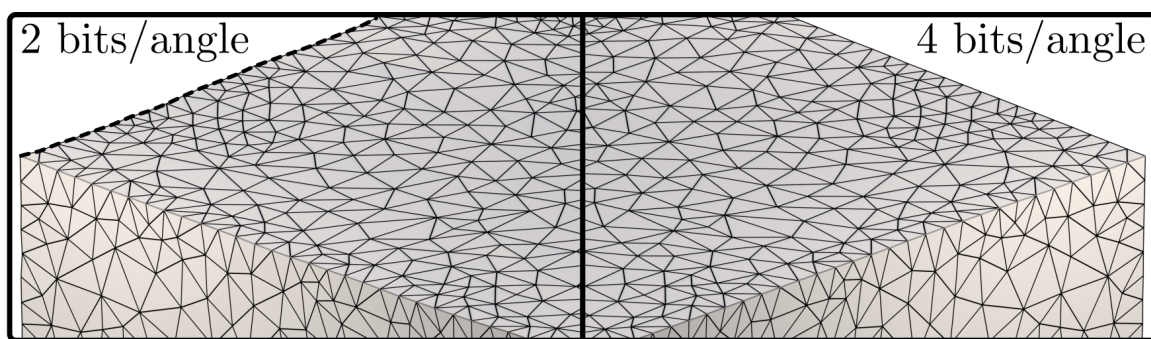


Figure 5.9 – Nous compressons la géométrie d'un cube en utilisant ses angles dièdres à différents taux de compression. Garder 4 bits par angle ne crée aucun artéfact visible alors que quelques irrégularités peuvent être perçues sur les arêtes (en pointillées) en ne gardant que 2 bits.

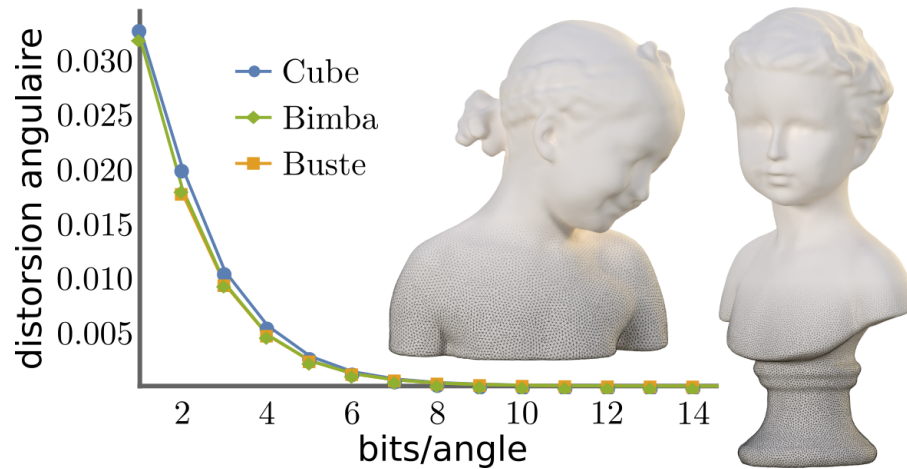


Figure 5.10 – La distorsion angulaire du cube compressé (voir la figure 5.9), du modèle Bimba (gauche) et du buste (droite) à différents taux de compression. Nous montrons la reconstruction des maillages compressés en n'utilisant que 2 bits par angle.

Application	Modèle	Téts	θ_b	Itérs	Temps
Paramétrisation	Écureuil	119k	0.20	$2 \times 2k$	493
	Buste	160k	0.30	$3 \times 3k$	1502
	Sphère	37k	0.10	$2 \times 2k$	129
	Tore	6k	0.10	$2 \times 2k$	21
Interpolation	Barre	9k	0.10	$2 \times 2k$	7
Optimisation	Sphère	37k	0.20	$2 \times 2k$	129
	Fertilité	364k	0.15	$2 \times 2k$	1550
Combinatoire	Pied	158k	0.10	$2 \times 2k$	684
Compression	Cube	47k	0.10	$2 \times 2k$	50
	Bimba	124k	0.10	$2 \times 2k$	156
	Buste	214k	0.10	$2 \times 2k$	274

Tableau 5.II – Quelques statistiques pour tous les exemples, où le nombre d'itérations est le nombre de phases, multiplié par le nombre d'itérations par phase, et où les temps de calcul sont en secondes.

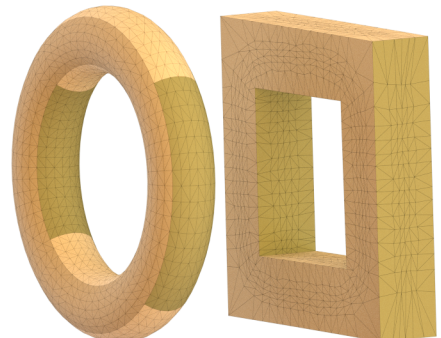
5.5 Discussion et conclusion

Nous avons démontré que la forme d'un maillage tétraédrique est complètement déterminée par ses angles dièdres et nous avons introduit des contraintes nécessaires et suffisantes devant être satisfaites pour immerger le maillage dans \mathbb{R}^3 . Ceci nous a mené à une procédure d'optimisation lorsque les contraintes ne sont pas satisfaites. Nous avons ensuite développé une méthode de reconstruction spectrale pour récupérer la position des sommets. Le résultat est l'immersion du maillage, ce qui implique qu'il n'y a ni tétraèdre inversé ni recouvrement multiple.

De plus, nous avons démontré l'applicabilité de notre méthode dans différents contextes du traitement de la géométrie volumique. Pour ces applications, en terme de qualité, nos résultats sont comparables à ceux de l'état de l'art et nous pensons que la robustesse additionnelle des applications localement injectives, garantie par notre méthode, peut être une propriété intéressante. Par contre, cette propriété apparait au détriment de quelques limitations suggérant différentes voies de recherche pour les travaux futurs.

Optimisation non linéaire Notre formulation du problème d'optimisation est non linéaire et non convexe, ce qui a la réputation d'être difficile à minimiser. Par conséquent, la performance de notre méthode ne se compare pas à celle de l'état de l'art. De plus, malgré que notre expérience ait démontré que la formulation par les moindres carrés non linéaires fonctionne bien en pratique pour la majorité des expériences, nous avons rencontré quelques échecs de convergence où le solveur est resté bloqué dans un minimum local (voir la figure 5.1). Convexifier le problème améliorerait la vitesse de convergence et assurerait qu'il y ait un seul minimum global.

Genre > 0 Nous rappelons qu'à l'exception de l'application à l'optimisation de maillages, cette méthode ne s'applique qu'aux boules topologiques. Utiliser des contraintes globales a toujours été un défi pour les algorithmes travaillant en coordonnées locales ; ce travail n'est pas une exception. Chaque poignée additionnelle nécessite une contrainte globale pour assurer qu'elle se referme



parfaitement. Une façon de résoudre cette limitation est de laisser la reconstruction spectrale gérer l'erreur résiduelle introduite par les contraintes manquantes. Tel qu'illustré par la figure insérée, un tore a été paramétrisé avec succès vers un polycube avec une différence maximale de 0.4° entre les angles dièdres aplanis et ceux reconstruits. Notez, par contre, que la reconstruction spectrale absorbe l'erreur au sens des moindres carrés, et qu'elle ne garantit donc pas l'injectivité locale. Pour remédier à ce problème, on pourrait remplir temporairement tous les tunnels avant l'aplanissement, puis les enlever après la reconstruction. Cependant, à notre avis, la solution idéale serait de trouver et d'ajouter à la représentation les contraintes permettant la considération de solides de genre élevé, ce qui est sujet à de travaux futurs.

Injectivité globale Notre méthode garantie l'injectivité locale pour l'intérieur du maillage. Par contre, similairement aux méthodes 2D, nous ne garantissons pas que la frontière ne s'auto-intersecte pas. Nous pourrions potentiellement obtenir l'injectivité globale par l'utilisation de techniques similaires à celles suggérées par ABF, c'est-à-dire de reconstruire itérativement le solide tout en ajustant les contraintes à la frontière afin d'éviter les auto-intersections.

Chapitre 6

Conclusion

Nous avons entrepris ces travaux pour développer de nouveaux algorithmes de paramétrisation quasi-conforme de maillages volumiques. Tel qu'énoncé dans l'introduction, ces paramétrisations ont de bonnes propriétés de préservation de l'aspect local d'un solide, mais elles ont été peu étudiées dans le contexte de l'informatique graphique, contrairement à leurs pendants 2D. Cette recherche a permis de généraliser aux volumes des concepts bien maîtrisés pour la paramétrisation de surfaces. Au cours de ces travaux, nous avons présenté trois approches à la paramétrisation volumique.

Au chapitre 3, nous avons élaboré une approche linéaire de la quasi-conformité. Nous avons développé une méthode déformant l'objet vers son domaine paramétrique par une méthode des moindres carrés linéaires inspirée d'une technique populaire 2D nommée *least-squares conformal maps*. Nous avons proposé d'utiliser les équations de Cauchy-Riemann pour chacun des plans canoniques en tous points du solide afin d'estimer la non-conformité de la transformation. Nous avons minimisé cette non-conformité par une méthode des moindres carrés, ce qui constitue le coeur de l'algorithme. Le résultat n'est pas une déformation quasi-conforme à son sens strict, car elle ne borne pas la distorsion. Néanmoins, sa simplicité et sa linéarité la rendent simple d'implémentation et rapide d'exécution. Les limitations sont que l'injectivité de la paramétrisation n'est pas garantie et que la frontière est fixe lors de l'optimisation volumique. Cette approche a été présentée à la conférence internationale *Shape Modeling International* et est parue dans la revue *Computers & Graphics* [PP12a].

Au chapitre 4, nous avons présenté une approche non linéaire basée sur les positions des sommets. Nous avons développé une technique déformant le domaine paramétrique vers l'objet par une méthode des moindres carrés non linéaires. L'algorithme consiste à déformer itérativement un domaine paramétrique, représenté sous forme d'un maillage d'éléments mixtes, vers un solide par un ajustement régularisé. Chaque itération ajuste la frontière du domaine à la frontière du solide tout en préservant la qualité des éléments internes à l'aide d'une métrique barrière. La déformation du domaine paramétrique au lieu de l'objet lui-même facilite l'utilisation de domaines à topologie non triviale. Nous avons utilisé

une métrique inspirée de la mécanique des grandes déformations garantissant l’injectivité locale de la transformation. L’ajustement de la frontière est faite en même temps que l’optimisation de l’intérieur du solide. Ces deux dernières propriétés résolvent ainsi les limitations de notre méthode précédente. Cette approche a été présentée à la conférence internationale *Symposium on Geometry Processing* et est parue dans la revue *Computer Graphics Forum* [PPL13].

Au chapitre 5, nous avons présenté une approche non linéaire basée sur les angles dièdres. Nous avons développé une méthode définissant la déformation de l’objet par les angles dièdres au lieu des positions des sommets du maillage. Nous avons montré que les positions des sommets sont déterminées uniquement à partir des angles dièdres, à une transformation de similitude près. Dans le cas où les angles ne satisfont pas aux contraintes structurelles, nous avons formulé un problème d’optimisation que nous résolvons par une méthode des moindres carrés non linéaires. Puis, nous avons développé une méthode de reconstruction spectrale rapide pour récupérer les positions des sommets à partir des angles dièdres de façon robuste. Ce changement de variables a permis une expression naturelle des bornes de distorsions de la déformation, assurant ainsi la quasi-conformité de la transformation. Nous avons présenté quelques applications exprimées en terme d’angles dièdres comme la paramétrisation volumique, l’interpolation de formes, l’optimisation de maillage, les formes induites par la combinatoire et la compression de maillage. Cette approche a été présentée à la conférence internationale *SIGGRAPH* et est parue dans la revue *ACM Transactions on Graphics* [PRP⁺15].

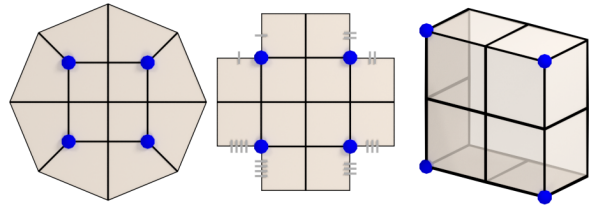
Travaux futurs Malgré tous les efforts mis dans cette recherche, les résultats de nos travaux ne parviennent pas, bien sûr, à solutionner tous les problèmes de la paramétrisation volumique quasi-conforme. La déformation de géométries 3D dont la distorsion est bornée est un problème intrinsèquement non linéaire et non convexe [KABL14]. Même si certaines méthodes utilisent des formulations localement convexes [AL13, KABL14], il n’existe pas, pour l’instant, de méthodes garantissant la convergence vers une déformation globalement optimale. À notre avis, il s’agit du plus grand défi à relever dans les travaux futurs.

D’autre part, les travaux présentés au cours de cette thèse nous ont conduits vers de nouvelles pistes de recherches intéressantes. Ces pistes sont issues des limitations et des problèmes rencontrés lors

du développement de nos méthodes. Par exemple, nos approches reposent toutes sur la création d'abstractions de solides. Ces abstractions ont pour la plupart été construites manuellement. Quoique beaucoup de travaux sont déjà parus sur la création automatique de polycubes, encore peu de techniques existent pour la génération automatique d'abstractions hexaédriques et de graphes de singularité. Nous croyons que des recherches dans ces domaines pourraient être bénéfiques afin de rendre le processus de paramétrisation volumique complètement automatique. Nous proposons trois pistes potentielles pour la création de telles abstractions.

Une première piste est de développer une méthode de construction automatique de graphes de singularité pour la paramétrisation volumique à base d'angles dièdres. Tel que mentionné précédemment, un graphe peut être extrait d'un champ vectoriel. Mais pour l'instant, aucune méthode ne garantit de générer un champ produisant un maillage hexaédrique (voir la section 3.1 de l'article de Li et al. [LLX⁺12]). En effet, quelques contraintes sur la combinatoire du graphe doivent être satisfaites pour assurer l'existence d'une abstraction hexaédrique. Deux exemples sont qu'une arête du graphe ne puisse pas se terminer à l'intérieur du solide et que le graphe ne doive pas contenir de boucles triangulaires [LLX⁺12]. Nous pensons que de construire le graphe directement faciliterait la gestion de ces contraintes. Une telle méthode pourrait s'inspirer de la création de courbes squelettes [LS13], où la courbe serait transformée en un graphe de singularité.

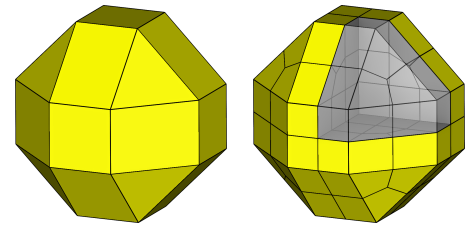
Une deuxième piste concerne la création d'abstractions hexaédriques pour l'ajustement de solides vu au chapitre 4. Nous proposons de généraliser le concept des polycubes à la création de maillages hexaédriques contenant des singularités internes en utilisant l'idée



d'un plongement en dimensions supérieures. Pour bien comprendre cette idée, faisons un parallèle avec le cas 2D. La figure insérée montre le maillage quadrangulaire grossier d'un cercle (gauche). Le domaine paramétrique de ce maillage peut être vu de deux façons. La première est que les singularités internes, notées par les points bleus, sont issues d'un domaine paramétrique planaire à topologie non triviale (centre). La deuxième est que ces singularités sont issues d'un domaine polycubique ouvert (droite). Cette deuxième interprétation offre la perspective intéressante suivante. En utilisant le même raisonnement, nous pourrions plonger un solide en dimension supérieure, le déformer de sorte à

obtenir un polycube ouvert en nD et importer la structure hexaédrique du polycube ainsi généré vers le solide. Pour cette idée, le plus grand défi à relever est la manipulation de solides en dimensions supérieures.

Une troisième piste pour la création d'abstractions hexaédriques est d'utiliser des polycubes tronqués, dont les maillages induits contiennent des hexaèdres, des prismes et des tétraèdres. Cependant, comme le montre la figure insérée, il est facile d'obtenir un maillage purement hexaédrique par une seule subdivision du



maillage. Ces maillages ont l'avantage d'introduire des singularités à l'intérieur du solide, permettant ainsi au maillage d'avoir des éléments de meilleure qualité. Pour réaliser un polycube tronqué, il nous faut spécifier automatiquement les axes pour l'alignement de chacune des faces de la frontière du solide, ce qui constitue la plus grande difficulté à surmonter.

Pour conclure, nous espérons maintenant que nos travaux inspireront d'autres chercheurs à proposer de nouveaux algorithmes de déformation quasi-conforme de maillages volumiques. Puisque la quasi-conformité permet une plus grande latitude que la conformité stricte et que la paramétrisation volumique est un domaine relativement récent, il est normal de croire qu'il reste encore beaucoup de chemin à parcourir. Vu la quantité de travaux apparue dans les dernières années sur ce sujet, nous sommes confiants que plusieurs chercheurs apporteront d'autres solutions originales à ce problème.

Bibliographie

- [ACOL00] Marc ALEXA, Daniel COHEN-OR et David LEVIN : As-rigid-as-possible shape interpolation. *In Proc. of SIGGRAPH '00*, pages 157–164, 2000.
- [Ahl66] Lars Valerian AHLFORS : *Lectures on Quasiconformal Mappings*. American Mathematical Soc., 1966.
- [AL13] Noam AIGERMAN et Yaron LIPMAN : Injective and bounded distortion mappings in 3D. *ACM Trans. Graph.*, 32(4):106 :1–14, 2013.
- [APH05] Arul ASIRVATHAM, Emil PRAUN et Hugues HOPPE : Consistent spherical parameterization. *In Proceedings of International Conference on Computational Science*, pages 265–272, 2005.
- [Bar94] John W. BARRETT : First order Regge calculus. *Classical and Quantum Gravity*, 11(11):2723–2730, 1994.
- [BCGB08] Mirela BEN-CHEN, Craig GOTSMAN et Guy BUNIN : Conformal flattening by curvature prescription and metric scaling. *Computer Graphics Forum*, 27(2):449–458, 2008.
- [BDS⁺12] Sofien BOUAZIZ, Mario DEUSS, Yuliy SCHWARTZBURG, Thibaut WEISE et Mark PAULY : Shape-up : Shaping discrete geometry with projections. *Computer Graphics Forum*, 31(5):1657–1667, 2012.
- [BKP⁺10] Mario BOTSCH, Leif KOBBELT, Mark PAULY, Pierre ALLIEZ et Bruno LÉVY : *Polygon Mesh Processing*. AK Peters, 2010.
- [Bla00] David E. BLAIR : *Inversion theory and conformal mapping*. Student mathematical library. American Mathematical Society, 2000.
- [BSWX02] Chandrajit BAJAJ, Scott SCHAEFER, Joe WARREN et Guoliang XU : A subdivision scheme for hexahedral meshes. *The Visual Computer*, 18(5-6):343–356, 2002.

- [CDHR08] Yanqing CHEN, Timothy A. DAVIS, William W. HAGER et Sivasankaran RAJAMANICKAM : Algorithm 887 : CHOLMOD, supernodal sparse cholesky factorization and update/downdate. *ACM Trans. Math. Softw.*, 35(3):22 :1–14, 2008.
- [Cer96] Davide P. CERVONE : Tight immersions of simplicial surfaces in three space. *Topology*, 35(4):863–873, 1996.
- [CPS11] Keenan CRANE, Ulrich PINKALL et Peter SCHRÖDER : Spin transformations of discrete surfaces. *ACM Trans. Graph.*, 30(4):104 :1–10, 2011.
- [CPS13] Keenan CRANE, Ulrich PINKALL et Peter SCHRÖDER : Robust fairing via conformal curvature flow. *ACM Trans. Graph.*, 32(4):61 :1–10, 2013.
- [CS09] Jaeil CHOI et Andrzej SZYMCAK : Fitting solid meshes to animated surfaces using linear elasticity. *ACM Trans. Graph.*, 28(1):6 :1–10, 2009.
- [CWKBC13] Renjie CHEN, Ofir WEBER, Daniel KEREN et Mirela BEN-CHEN : Planar shape interpolation with bounded distortion. *ACM Trans. Graph.*, 32(4):108 :1–12, 2013.
- [CWQ⁺04] Kin-Shing D. CHENG, Wenping WANG, Hong QIN, Kwan-Yee K. WONG, Huaiping YANG et Yang LIU : Fitting subdivision surfaces to unorganized point data using SDM. *In Proceedings of the Computer Graphics and Applications (PG)*, pages 16–24, 2004.
- [CWQ⁺07] Kin-Shing D. CHENG, Wenping WANG, Hong QIN, Kwan-Yee K. WONG, Huaiping YANG et Yang LIU : Design and analysis of optimization methods for subdivision surface fitting. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 13(5):878–890, 2007.
- [Dar93] Prabir DARIPA : A fast algorithm to solve the Beltrami equation with applications to quasiconformal mappings. *Journal of Computational Physics*, 106(2):355–365, 1993.
- [DBV93] Giuseppe DI BATTISTA et Luca VISMARA : Angles of planar triangular graphs. *In Proceedings of ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 431–437, 1993.

- [DMA02] Mathieu DESBRUN, Mark MEYER et Pierre ALLIEZ : Intrinsic parameterizations of surface meshes. *Computer Graphics Forum*, 21(2):209–218, 2002.
- [DMK03] Patrick DEGENER, Jan MESETH et Reinhard KLEIN : An adaptable surface parameterization method. *In Proceedings of International Meshing Roundtable (IMR)*, pages 201–213, 2003.
- [DS08] Bianca DITTRICH et Simone SPEZIALE : Area-angle variables for general relativity. *New Journal of Physics*, 10(8):083006, 2008.
- [EDD⁺95] Matthias ECK, Tony DEROSE, Tom DUCHAMP, Hugues HOPPE, Michael LOUNSBERRY et Werner STUETZLE : Multiresolution analysis of arbitrary meshes. *In Proceedings of ACM SIGGRAPH*, pages 173–182, 1995.
- [EH96] Matthias ECK et Hugues HOPPE : Automatic reconstruction of B-spline surfaces of arbitrary topological type. *In Proceedings of ACM SIGGRAPH*, pages 325–334, 1996.
- [EPT⁺07] Ilya ECKSTEIN, Jean-Philippe PONS, Yiyong TONG, Chung Chieh Jay KUO et Mathieu DESBRUN : Generalized surface flows for mesh processing. *In Proceedings of Eurographics/ACM Symposium on Geometry Processing (SGP)*, pages 183–192, 2007.
- [ES94] Herbert EDELSBRUNNER et Nimish R. SHAH : Triangulating topological spaces. *In Proceedings of ACM Symposium on Computational Geometry (SCG)*, pages 285–292, 1994.
- [FK99] Lori A. FREITAG et Patrick M. KNUPP : Tetrahedral element shape optimization via the jacobian determinant and condition number. *In Proceedings of International Meshing Roundtable (IMR)*, pages 247–258, 1999.
- [Flo97] Michael S. FLOATER : Parametrization and smooth approximation of surface triangulations. *Computer Aided Geometric Design*, 14(3):231–250, 1997.
- [Flo03] Michael S. FLOATER : Mean value coordinates. *Computer Aided Geometric Design*, 20(1):19–27, 2003.

- [FSD05] Ilja FRIEDEL, Peter SCHRÖDER et Mathieu DESBRUN : Unconstrained spherical parameterization. *In ACM SIGGRAPH 2005 Sketches*, 2005.
- [Gra15] GRAPHITE, janvier 2015 : <http://alice.loria.fr>.
- [Gre86] Ned GREENE : Environment mapping and other applications of world projections. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 6(11):21–29, 1986.
- [Grö28] H. GRÖTZSCH : Über einige Extremalprobleme der konformen Abbildung. I, II. *Berichte Leipzig*, 80:367–376, 497–502, 1928.
- [GSZ11] James GREGSON, Alla SHEFFER et Eugene ZHANG : All-hex mesh generation via volumetric polycube deformation. *Computer Graphics Forum*, 30(5):1407–1416, 2011.
- [GVSS00] Igor GUSKOV, Kiril VIDIMČE, Wim SWELDENS et Peter SCHRÖDER : Normal meshes. *In Proceedings of ACM SIGGRAPH*, pages 95–102, 2000.
- [GY03] Xianfeng GU et Shing-Tung YAU : Global conformal surface parameterization. *In Proceedings of Eurographics/ACM Symposium on Geometry Processing (SGP)*, pages 127–137, 2003.
- [HG99] Kai HORMANN et Günther GREINER : MIPS : An efficient global parametrization method. *In Curve and Surface Design*, pages 153–162. Vanderbilt University Press, 1999.
- [HHQ05] Jing HUA, Ying HE et Hong QIN : Trivariate simplex splines for inhomogeneous solid modeling in engineering design. *ASME Transactions : Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 5(2):149–157, 2005.
- [HJS⁺14] Jin HUANG, Tengfei JIANG, Zeyun SHI, Yiying TONG, Hujun BAO et Mathieu DESBRUN : L_1 -based construction of polycube maps from complex shapes. *ACM Trans. Graph.*, 33(3):25 :1–11, 2014.
- [HPS08] Kai HORMANN, Konrad POLTHIER et Alla SHEFFER : Mesh parameterization : Theory and practice. *In ACM SIGGRAPH Asia Course Notes*, 2008.

- [HTWB11] Jin HUANG, Yiyong TONG, Hongyu WEI et Hujun BAO : Boundary aligned smooth 3D cross-frame field. *ACM Trans. Graph.*, 30(6):143 :1–8, 2011.
- [HWFQ09] Ying HE, Hongyu WANG, Chi-Wing FU et Hong QIN : A divide-and-conquer approach for automatic polycube map construction. *Computers & Graphics*, 33(3):369–380, 2009.
- [HXH10] Shuchu HAN, Jiazhi XIA et Ying HE : Hexahedral shell mesh construction via volumetric polycube map. *In Proceedings of ACM Symposium on Solid and Physical Modeling (SPM)*, pages 127–136, 2010.
- [IGG01] Martin ISENBURG, Stefan GUMHOLD et Craig GOTSMAN : Connectivity shapes. *In Proceedings of the Conference on Visualization (VIS)*, pages 135–142, 2001.
- [IN08] Arieh ISERLES et Syvert P. NØRSETT : From high oscillation to rapid approximation I : Modified Fourier expansions. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 28(4):862–887, 2008.
- [JHW⁺14] Tengfei JIANG, Jin HUANG, Yuanzhen WANG, Yiyong TONG et Hujun BAO : Frame field singularity correction for automatic hexahedralization. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 20(8):1189–1199, 2014.
- [JMD⁺07] Pushkar JOSHI, Mark MEYER, Tony DEROSE, Brian GREEN et Tom SANOCKI : Harmonic coordinates for character articulation. *ACM Trans. Graph.*, 26(3):71 :1–10, 2007.
- [JRG13] Amaury JOHNEN, Jean-François REMACLE et Christophe GEUZAIN : Geometrical validity of curvilinear finite elements. *Journal of Computational Physics*, 233:359–372, 2013.
- [JSW05] Tao JU, Scott SCHAEFER et Joe WARREN : Mean value coordinates for closed triangular meshes. *ACM Trans. Graph.*, 24(3):561–566, 2005.

- [KABL14] Shahar Z. KOVALSKY, Noam AIGERMAN, Ronen BASRI et Yaron LIPMAN : Controlling singular values with semidefinite programming. *ACM Trans. Graph.*, 33(4):68 :1–13, 2014.
- [KG08] Scott KIRCHER et Michael GARLAND : Free-form motion processing. *ACM Trans. Graph.*, 27(2):12 :1–13, 2008.
- [KLS03] Andrei KHODAKOVSKY, Nathan LITKE et Peter SCHRÖDER : Globally smooth parameterizations with low distortion. *ACM Trans. Graph.*, 22(3):350–357, 2003.
- [KNP07] Felix KÄLBERER, Matthias NIESER et Konrad POLTHIER : QuadCover - Surface parameterization using branched coverings. *Computer Graphics Forum*, 26(3):375–384, 2007.
- [Knu00] Patrick M. KNUPP : Achieving finite element mesh quality via optimization of the Jacobian matrix norm and associated quantities. Part II - A framework for volume mesh optimization and the condition number of the Jacobian matrix. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:1165–1185, 2000.
- [KSS06] Liliya KHAREVYCH, Boris SPRINGBORN et Peter SCHRÖDER : Discrete conformal mappings via circle patterns. *ACM Trans. Graph.*, 25(2):412–438, 2006.
- [KVL99] Leif P. KOBELT, Jens VORSATZ et Ulf LABSIK : A shrink wrapping approach to remeshing polygonal surfaces. *Computer Graphics Forum*, 18(3):119–130, 1999.
- [KW14] Tsz-Ho KWOK et Charlie C.L. WANG : Domain construction for volumetric cross-parameterization. *Computers & Graphics*, 38:86–96, 2014.
- [LG15] Zohar LEVI et Craig GOTSMAN : Smooth rotation enhanced as-rigid-as-possible mesh animation. *IEEE Trans. Vis. Comput. Graphics*, 21(2):264–277, 2015.
- [LGW⁺07] Xin LI, Xiaohu GUO, Hongyu WANG, Ying HE, Xianfeng David GU et Hong QIN : Harmonic volumetric mapping for solid modeling applications. *In Proceedings of ACM Symposium on Solid and Physical Modeling (SPM)*, pages 109–120, 2007.

- [LGW⁺09] Xin LI, Xiaohu GUO, Hongyu WANG, Ying HE, Xianfeng David GU et Hong QIN : Meshless harmonic volumetric mapping using fundamental solution methods. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 6(3):409–422, 2009.
- [Li10] Xin LI : Nondegeneracy of harmonic volumetric parameterization on star-shaped domains. Rapport technique, Electrical and Computer Engineering Department, Louisiana State University, 2010.
- [LJFW08] Juncong LIN, Xiaogang JIN, Zhengwen FAN et Charlie C. L. WANG : Automatic polycube-maps. In *Proceedings of Geometric Modeling and Processing (GMP)*, pages 3–16, 2008.
- [LKF12] Yaron LIPMAN, Vladimir G. KIM et Thomas A. FUNKHOUSER : Simple formulas for quasiconformal plane deformations. *ACM Trans. Graph.*, 31(5):124 :1–13, 2012.
- [LLCO08] Yaron LIPMAN, David LEVIN et Daniel COHEN-OR : Green coordinates. *ACM Trans. Graph.*, 27(3):78 :1–10, 2008.
- [LLT11] Meng-Fei LI, Sheng-Hui LIAO et Ruo-Feng TONG : Facial hexahedral mesh transferring by volumetric mapping based on harmonic fields. *Computers & Graphics*, 35(1):92–98, February 2011.
- [LLWQ10] Bo LI, Xin LI, Kexiang WANG et Hong QIN : Generalized polycube trivariate splines. In *Proceedings of Shape Modeling International (SMI)*, pages 261–265, 2010.
- [LLX⁺12] Yufei LI, Yang LIU, Weiwei XU, Wenping WANG et Baining GUO : All-hex meshing using singularity-restricted field. *ACM Trans. Graph.*, 31(6):177 :1–11, 2012.
- [LN89] Dong C. LIU et Jorge NOCEDAL : On the limited memory BFGS method for large scale optimization. *Mathematical Programming : Series A and B*, 45(3):503–528, 1989.
- [LPRM02] Bruno LÉVY, Sylvain PETITJEAN, Nicolas RAY et Jérôme MAILLOT : Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation. *ACM Trans. Graph.*, 21(3):362–371, 2002.

- [LRL06] Wan-Chiu LI, Nicolas RAY et Bruno LÉVY : Automatic and interactive mesh to T-spline conversion. *In Proceedings of Eurographics/ACM Symposium on Geometry Processing (SGP)*, pages 191–200, 2006.
- [LS07] François LABELLE et Jonathan Richard SHEWCHUK : Isosurface stuffing : Fast tetrahedral meshes with good dihedral angles. *ACM Trans. Graph.*, 26(3):57 :1–10, 2007.
- [LS13] Marco LIVESU et Riccardo SCATENI : Extracting curve-skeletons from digital shapes using occluding contours. *The Visual Computer*, 29(9):907–916, 2013.
- [LSS⁺98] Aaron W. F. LEE, Wim SWELDENS, Peter SCHRÖDER, Lawrence COWSAR et David DOBKIN : MAPS : multiresolution adaptive parameterization of surfaces. *In Proceedings of ACM SIGGRAPH*, pages 95–104, 1998.
- [LT12] Mengfei LI et Ruofeng TONG : All-hexahedral mesh generation via inside-out advancing front based on harmonic fields. *The Visual Computer*, 28(6-8):839–847, 2012.
- [Luo97] Feng LUO : On a problem of Fenchel. *Geometriae Dedicata*, 64(3):277–282, 1997.
- [LVS⁺13] Marco LIVESU, Nicholas VINING, Alla SHEFFER, James GREGSON et Riccardo SCATENI : Polycut : Monotone graph-cuts for polycube base-complex construction. *ACM Trans. Graph.*, 32(6):171 :1–12, 2013.
- [LWL⁺09] Yang LIU, Wenping WANG, Bruno LÉVY, Feng SUN, Dong-Ming YAN, Lin LU et Changlei YANG : On centroidal voronoi tessellation - energy smoothness and fast computation. *ACM Trans. Graph.*, 28(4):101 :1–17, 2009.
- [LXW⁺10] Xin LI, Huanhuan XU, Shenghua WAN, Zhao YIN et Wuyi YU : Feature-aligned harmonic volumetric mapping using MFS. *Computers & Graphics*, 34(3):242–251, 2010. Shape Modelling International (SMI) Conference 2010.
- [LZLW15] Lei LIU, Yongjie ZHANG, Yang LIU et Wenping WANG : Feature-preserving T-mesh construction using skeleton-based polycubes. *Computer-Aided Design*, 58:162–172, 2015.

- [MC10] Tobias MARTIN et Elaine COHEN : Volumetric parameterization of complex objects by respecting multiple materials. *Computers & Graphics*, 34(3):187–197, 2010.
- [MCK09a] Tobias MARTIN, Elaine COHEN et Robert M. KIRBY : Volumetric parameterization and trivariate B-spline fitting using harmonic functions. *Computer Aided Geometric Design*, 26(6):648–664, 2009.
- [MCK09b] Tobias MARTIN, Elaine COHEN et Robert M. KIRBY : Volumetric parameterization and trivariate B-spline fitting using harmonic functions. *Computer Aided Geometric Design*, 26(6):648–664, 2009.
- [MDM⁺02] Matthias MÜLLER, Julie DORSEY, Leonard MCMILLAN, Robert JAGNOW et Barbara CUTLER : Stable real-time deformations. *In Proceedings of ACM Symposium on Computer Animation (SCA)*, pages 49–54, 2002.
- [MHTG05] Matthias MÜLLER, Bruno HEIDELBERGER, Matthias TESCHNER et Markus GROSS : Meshless deformations based on shape matching. *ACM Trans. Graph.*, 24(3):471–478, 2005.
- [MLDH15] Adrien MAGLO, Guillaume LAVOUÉ, Florent DUPONT et Céline HUDELLOT : 3D mesh compression : Survey, comparisons, and emerging trends. *ACM Comput. Surv.*, 47(3):44 :1–41, 2015.
- [MMP89] Yvon MADAY, Cathy MAVRIPLIS et Anthony T. PATERA : Nonconforming Mortar element methods : Application to spectral discretizations. *In PÉRIAUX et O. B. WIDLUND, éditeurs : Domain Decomposition Methods*, pages 392–418. SIAM, 1989.
- [Moa05] Maher MOAKHER : A differential geometric approach to the geometric mean of symmetric positive-definite matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 26(3):735–747, 2005.
- [MTAD08] Patrick MULLEN, Yiyong TONG, Pierre ALLIEZ et Mathieu DESBRUN : Spectral conformal parameterization. *Computer Graphics Forum*, 27(5):1487–1494, 2008.

- [NRP11] Matthias NIESER, Ulrich REITEBUCH et Konrad POLTHIER : CubeCover - Parameterization of 3D volumes. *Computer Graphics Forum*, 30(5):1397–1406, 2011.
- [NS10] Karsten NOE et Thomas SØRENSEN : Solid mesh registration for radiotherapy treatment planning. *In Proceedings of Biomedical Simulation (ISBMS)*, pages 59–70, 2010.
- [NW06] Jorge NOCEDAL et Stephen J. WRIGHT : *Numerical Optimization*. Springer, 2006.
- [NYL12] Vincent NIVOLIER, Dong-Ming YAN et Bruno LÉVY : Fitting polynomial surfaces to triangular meshes with Voronoi squared distance minimization. *Engineering with Computers*, 30(3):289–300, 2012.
- [PH03] Emil PRAUN et Hugues HOPPE : Spherical parametrization and remeshing. *ACM Trans. Graph.*, 22(3):340–349, 2003.
- [PL03] Helmut POTTMANN et Stefan LEOPOLDSEDER : A concept for parametric surface fitting which avoids the parametrization problem. *Computer Aided Geometric Design*, 20(6):343–362, 2003.
- [PL14] Roi PORANNE et Yaron LIPMAN : Provably good planar mappings. *ACM Trans. Graph.*, 33(4):76 :1–11, 2014.
- [PP12a] Gilles-Philippe PAILLÉ et Pierre POULIN : As-conformal-as-possible discrete volumetric mapping. *Computers & Graphics*, 36(5):427–433, 2012.
- [PP12b] Kaare B. PETERSEN et Michael S. PEDERSEN : *The Matrix Cookbook*. Technical University of Denmark, 2012.
- [PPL13] Gilles-Philippe PAILLÉ, Pierre POULIN et Bruno LÉVY : Fitting polynomial volumes to surface meshes with Voronoï squared distance minimization. *Computer Graphics Forum*, 32(5):103–112, 2013.
- [PRP⁺15] Gilles-Philippe PAILLÉ, Nicolas RAY, Pierre POULIN, Alla SHEFFER et Bruno LÉVY : Dihedral angle-based maps of tetrahedral meshes. *ACM Trans. Graph.*, 34(4):54 :1–10, 2015.

- [PSS01] Emil PRAUN, Wim SWELDENS et Peter SCHRÖDER : Consistent mesh parameterizations. *In Proceedings of ACM SIGGRAPH*, pages 179–184, 2001.
- [PW89] Alex PENTLAND et John R. WILLIAMS : Good vibrations : Modal dynamics for graphics and animation. *ACM Trans. Graph.*, 23(3):207–214, 1989.
- [Reg61] Tullio REGGE : General relativity without coordinates. *Nuovo Cim.*, 19(3):558–571, 1961.
- [RLL⁺06] Nicolas RAY, Wan Chiu LI, Bruno LÉVY, Alla SHEFFER et Pierre ALLIEZ : Periodic global parameterization. *ACM Trans. Graph.*, 25(4):1460–1485, 2006.
- [SB11] Barna SZABÓ et Ivo BABUŠKA : *Introduction to Finite Element Analysis : Formulation, Verification and Validation*. John Wiley & Sons, April 2011.
- [SBCBG11] Justin SOLOMON, Mirela BEN-CHEN, Adrian BUTSCHER et Leonidas GUIBAS : As-killing-as-possible vector fields for planar deformation. *Computer Graphics Forum*, 30(5):1543–1552, 2011.
- [SdS01] Alla SHEFFER et Eric de STURLER : Parameterization of faceted surfaces for meshing using angle-based flattening. *Engineering with Computers*, 17(3):326–337, 2001.
- [SGD04] Alla SHEFFER, Craig GOTSMAN et Nira DYN : Robust spherical parameterization of triangular meshes. *Computing - Geometric Modelling*, 72(1-2):185–193, 2004.
- [She13] Jonathan Richard SHEWCHUK : Lecture notes on geometric robustness. University of California at Berkeley, 2013.
- [Si07] Hang SI : TetGen. A quality tetrahedral mesh generator and three-dimensional Delaunay triangulator. URL : <http://tetgen.berlios.de>, 2007.
- [SLMB05] Alla SHEFFER, Bruno LÉVY, Maxim MOGILNITSKY et Alexander BOGOMYAKOV : ABF++ : fast and robust angle based flattening. *ACM Trans. Graph.*, 24(2):311–330, 2005.

- [SSGH01] Pedro V. SANDER, John SNYDER, Steven J. GORTLER et Hugues HOPPE : Texture mapping progressive meshes. *In Proceedings of ACM SIGGRAPH*, pages 409–416, 2001.
- [SSP08] Boris SPRINGBORN, Peter SCHRÖDER et Ulrich PINKALL : Conformal equivalence of triangle meshes. *ACM Trans. Graph.*, 27(3):77 :1–11, 2008.
- [SZBN03] Thomas W. SEDERBERG, Jianmin ZHENG, Almaz BAKENOV et Ahmad NASRI : T-splines and T-NURCCs. *ACM Trans. Graph.*, 22(3):477–484, 2003.
- [THCM04] Marco TARINI, Kai HORMANN, Paolo CIGNONI et Claudio MONTANI : Polycube-maps. *ACM Trans. Graph.*, 23(3):853–860, 2004.
- [TRBS98] Jose G. TINOCO-RUIZ et Pablo BARRERA-SÁNCHEZ : Smooth and convex grid generation over general plane regions. *Mathematics and Computers in Simulation*, 46(2):87–102, 1998.
- [WGC⁺04] Yalin WANG, Xianfeng David GU, Tony F. CHAN, Paul M. THOMPSON et Shing-Tung YAU : Volumetric harmonic brain mapping. *In Proceedings of IEEE International Symposium on Biomedical Imaging : Nano to Macro (ISBI)*, volume 2, pages 1275–1278, 2004.
- [WGY03] Yalin WANG, Xianfeng David GU et Shing-Tung YAU : Volumetric harmonic map. *Communications in Information and Systems*, 3(3):192–202, 2003.
- [WHL⁺07] Hongyu WANG, Ying HE, Xin LI, Xianfeng GU et Hong QIN : Polycube splines. *In Proceedings of ACM Symposium on Solid and Physical Modeling (SPM)*, pages 241–251, 2007.
- [WJH⁺08] Hongyu WANG, Miao JIN, Ying HE, Xianfeng GU et Hong QIN : User-controllable polycube map for manifold spline construction. *In Proceedings of ACM symposium on Solid and physical modeling (SPM)*, pages 397–404, 2008.

- [WLL⁺12] Kexiang WANG, Xin LI, Bo LI, Huanhuan XU et Hong QIN : Restricted trivariate polycube splines for volumetric data modeling. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 18(5):703–716, 2012.
- [WMZ12] Ofir WEBER, Ashish MYLES et Denis ZORIN : Computing extremal quasiconformal maps. *Computer Graphics Forum*, 31(5):1679–1689, 2012.
- [WYZ⁺11] Shenghua WAN, Zhao YIN, Kang ZHANG, Hongchao ZHANG et Xin LI : A topology-preserving optimization algorithm for polycube mapping. *Computers & Graphics*, 35(3):639–649, 2011.
- [WZ14] Ofir WEBER et Denis ZORIN : Locally injective parametrization with arbitrary fixed boundaries. *ACM Trans. Graph.*, 33(4):75 :1–12, 2014.
- [WZT⁺08] Jiaping WANG, Shuang ZHAO, Xin TONG, Stephen LIN, Zhouchen LIN, Yue DONG, Baining GUO et Heung-Yeung SHUM : Modeling and rendering of heterogeneous translucent materials using the diffusion equation. *ACM Trans. Graph.*, 27(1):9 :1–18, 2008.
- [XC02] H. XIAO et L. CHEN : Hencky’s elasticity model and linear stress-strain relations in isotropic finite hyperelasticity. *Acta Mechanica*, 157(1):51–60, 2002.
- [XGH⁺11] Jiazhi XIA, Ismael GARCIA, Ying HE, Shi-Qing XIN et Gustavo PATOW : Editable polycube map for GPU-based subdivision surfaces. *In Proceedings of ACM Symposium on Interactive 3D Graphics and Games (I3D)*, pages 151–158, 2011.
- [XHH⁺10] Jiazhi XIA, Ying HE, Shuchu HAN, Chi-Wing FU, Feng LUO et Xianfeng David GU : Parameterization of star-shaped volumes using Green’s functions. *In Proceedings of Geometric Modeling and Processing (GMP)*, volume 6130, pages 219–235, 2010.
- [XHY⁺10] Jiazhi XIA, Ying HE, Xiaotian YIN, Shuchu HAN et Xianfeng David GU : Direct-product volumetric parameterization of handlebodies via harmonic fields. *In Proceedings of Shape Modeling International (SMI)*, pages 3–12, 2010.

- [YGL⁺09] Yong-Liang YANG, Ren GUO, Feng LUO, Shi-Min HU et Xianfeng GU : Generalized discrete Ricci flow. *Computer Graphics Forum*, 28(7):2005–2014, 2009.
- [YJLG08] Xiaotian YIN, Miao JIN, Feng LUO et Xianfeng GU : Discrete curvature flow for hyperbolic 3-manifolds with complete geodesic boundaries. *In International Symp. on Visual Computing (ISVC)*, 2008.
- [YJLG09] Xiaotian YIN, Miao JIN, Feng LUO et Xianfeng David GU : Discrete curvature flows for surfaces and 3-manifolds. *In Proceedings of Emerging Trends in Visual Computing (ETVC)*, pages 38–74, 2009.
- [YLSL11] I-Cheng YEH, Chao-Hung LIN, Olga SORKINE et Tong-Yee LEE : Template-based 3D model fitting using dual-domain relaxation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 17(8):1178–1190, 2011.
- [ZLS07] Rhaleb ZAYER, Bruno LÉVY et Hans-Peter SEIDEL : Linear angle based parameterization. *In Proceedings of Eurographics/ACM Symposium on Geometry Processing (SGP)*, pages 135–141, 2007.
- [ZLYG09] Wei ZENG, Feng LUO, Shing Tung YAU et Xianfeng David GU : Surface quasi-conformal mapping by solving Beltrami equations. *In Proceedings of Mathematics of Surfaces XIII*, volume 5654, pages 391–408, 2009.
- [ZMKG11] Wei ZENG, Joseph MARINO, Arie KAUFMAN et Xianfeng David GU : Volumetric colon wall unfolding using harmonic differentials. *Computers & Graphics*, 35(3):726–732, 2011.
- [ZRS05] Rhaleb ZAYER, Christian RÖSSL et Hans-Peter SEIDEL : Variations on angle based flattening. *In Advances in Multiresolution for Geometric Modelling*, pages 187–199, 2005.